前　言

数学分析是数学类各专业的最重要的一门基础课程，是数学类各专业及一些信息、计算机类专业硕士研究生入学考试的必考课程之一，同时也是大学生入学后遇到的第一门内容抽象的课程．对初学者来说，其中的许多概念难懂，方法抽象，解题难以入手．因此，如何把握课程的内容，掌握正确的学习方法显得至关重要．另外，有一些理论问题和解题的方法与技巧在该课程的教学中不能充分地展开，在本科高年级开设数学分析选讲是十分必要的，能够使报考硕士研究生的学生从容地面对入学考试．基于上述原因，我们编写了这本书，以帮助学生学好数学分析，满足广大读者学习和考研复习的需要．

全书采用分类、分块的方法，系统地总结了数学分析中的基本内容和基本方法，以邓东皋、尹小玲编著的《数学分析简明教程》(以下简称《教程》）的课后习题解答为主线，给出了 300 多道典型例题．通过一系列典型例题，由浅入深地介绍了数学分析的学习方法和解题方法，同时注重一题多解、一题多证．特别是通过对典型例题的分析和注释，使学生能够更好地融会知识、理解概念和掌握方法，以提高学生的分析问题和解决问题的能力．

本书包括：函数与极限、实数理论的基本定理、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、数项级数和函数项级数、反常积分和含参变量积分共八章．

各章节的内容结构分为基本要求、主要概念和结论、常用解题方法与典型例题、综合例题四部分内容．

一、基本要求．根据我们自己对数学分析教学大纲的理解，列出了需要掌握的知识点．由于没有统一要求，仅供参考．

二、主要概念和结论．按基本要求列出基本内容，帮助读者抓住重点，全面把握章节内容．

三、常用解题方法及典型例题．根据编者的教学实践，选解了大量课程内容要求的典型例题和《教程》的主要习题．对具有代表性的题目给出了多种解题方法，对常用解题方法进行了分析、注释和总结．

四、综合例题．为了满足进一步深造的同学的需求，我们选解了大量综合性的题目和部分理工科大学的研究生入学试题．

书后的附录1给出了《教程》的主要习题解答与提示，附录2给出了东北大学和北京师范大学近几年的硕士研究生入学考试试题．

本书由王晓敏、李晓奇、惠兴杰主编；副主编为王书田（河北工业职业技术学院）、张建波、马祥、张子选．

由于编者水平所限，加上时间仓促，不妥与错误之处在所难免，所作的解答也未必是最好的，恳请读者批评指正．

编　者

2005年7月于东北大学秦皇岛分校

目　　录

第一章　函数与极限

数学分析这门课程研究的对象是函数，而它是用极限方法研究函数的．从方法论的角度来说，这是数学分析区别于初等数学的显著性标志．

数学分析中几乎所有的概念都离不开极限．极限概念是数学分析的重要概念，极限理论是数学分析的基础理论和核心，它贯穿于数学分析的全部内容之中．

§1　函　数

一、基本要求

1．理解函数的概念，理解复合函数、分段函数的概念．

2．掌握基本初等函数的性质及其图形．

3．掌握几种重要的非初等函数．

4．会判断函数的有界性、奇偶性等性质．

二、主要概念和结论

1．函数的定义　设 X 是某实数集合，若存在一对应法则 f，使得对于 X 中的任一实数 x，存在惟一的实数 $y\in \mathrm{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 X 的函数，记为

$$f:X\to \mathrm{R}\quad 或\quad f:x\to y\quad 或\quad y=f(x),\ x\in X.$$

X 称为函数 f 的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．

函数的确定取决于两个因素：定义域 X；对应法则 f．

2．初等函数

六种基本初等函数　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数．

初等函数　由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的复合运算所得的函数．

3．几种常用的重要函数

(1) 振荡函数

$$y=\begin{cases}x^{a}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

(2) 取整函数 $y=[x]$.

(3) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}.$$

(4) 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

4. 函数的几种基本特性　设函数 $f(x)$在区间 X 有定义.

(1) 奇偶性　设 X 关于原点对称，若 $\forall x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；若 $\forall x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数.

(2) 单调性　若 $\forall x_1, x_2\in X$，且 $x_1\leqslant x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$在 X 单调上升(下降)或单调增加(减少).

(3) 周期性　若 $\exists T>0$，$\forall x\in X$，且 $x+T\in X$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的周期.

(4) 有界性　若 $\exists M>0$，$\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 有界.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-1】　求证 $\max(a, b)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$；$\min(a, b)=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$.

【证明】　若 $a\geqslant b$，则 $\max(a, b)=a$，$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}=a$，从而 $\max(a, b)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$；若 $a<b$，同法可证结果成立．同理可证 $\min(a, b)=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$.

【例 1-2】　证明 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$在$(-\infty, +\infty)$有界.

【证明】 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，由 $x^2+1\geqslant 2|x|$ 知，$\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$. 故 $|f(x)|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$. 即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有界.

【例 1-3】 叙述函数无界，并证明 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$无界.

【解】 设函数 $f(x)$在 X 有定义，若 $\forall M>0$，$\exists x_0\in X$，使得 $|f(x_0)|>M$，则 $f(x)$在 X 无界.

$\forall M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+M}}\in(0,1)$，则 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0^2}=1+M>M$. 故 $f(x)$在$(0,1)$无界.

【例 1-4】 设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的任何函数，证明 $f(x)$可分解成奇函数与偶函数之和.

【证明】 构造函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，则 $g(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-g(x)$，$h(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=h(x)$，即 $g(x)$为奇函数，$h(x)$为偶函数. 而 $f(x)=g(x)+h(x)$，故 $f(x)$可分解成奇函数与偶函数之和.

【例 1-5】 用肯定语气叙述在$(-\infty,+\infty)$

(1) $f(x)$不是奇函数；　　(2) $f(x)$不是单调上升函数；

(3) $f(x)$无零点；　　(4) $f(x)$无上界.

【解】 (1) 若 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)\neq -f(-x_0)$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$不是奇函数.

(2) 若 $\exists x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$不是单调上升函数.

(3) 若 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)|>0$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$无零点.

(4) 若 $\forall M>0$，$\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)>M$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$无上界.

【例 1-6】 设 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$. 求复合函数 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

【解】 因 $g(x)\leqslant 0$，所以

$$f(g(x))=-g(x)-1=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant 0\\ x^2-1, & x>0\end{cases}.$$

易知当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant 0$；当 $x<-1$ 或 $x>0$ 时，$f(x)>0$. 于是

$$g(f(x))=\begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant 0 \\ -f^2(x), & f(x)>0 \end{cases}=\begin{cases} -x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -(-x-1)^2, & x<-1 \\ -x^2, & x>0 \end{cases}$$

§2 数列极限

一、基本要求

1. 掌握数列极限的“ε-N”定义，会用它们证明数列极限及有关命题.

2. 掌握收敛数列性质(惟一性、单调性、保号性及不等式性质等)及四则运算法则.

3. 掌握数列极限存在的两个准则.

二、主要概念和结论

1. 数列极限的定义　若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a$，$n\to\infty$. 也称 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

若 $\{x_n\}$ 的极限为 0，则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量.

若 $\forall G>0$，$\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $|x_n|>G$，则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量.

2. 收敛数列的性质　若 $x_n\to a(n\to\infty)$，则数列 $\{x_n\}$ 具有下列性质：

(1) 有界性　$\exists M>0$，$\forall n\in \mathbf{N}^+$，有 $|x_n|\leqslant M$.

(2) 保号性　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则 $\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $x_n>\dfrac{a}{2}>0$.

(3) 保序性　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a>b$，则 $\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $x_n>y_n$.

(4) 极限不等式　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $x_n\leqslant y_n$，则 $a\leqslant b$.

注　即使 $x_n<y_n$，也只有结论 $a\leqslant b$.

(5) 惟一性　若数列极限存在，则极限是惟一的.

3. 数列极限的运算性质

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,\ \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\quad (b\neq 0).$$

特别地，若 c 是常数，便有 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 夹迫准则　若 $\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(3) 单调有界原理　单调有界的数列必有极限.

(4) 重要极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

(5) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量，$\{y_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-7】　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$.

【证明】　$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| = \frac{5}{4\sqrt{n}-2} = \frac{5}{2\sqrt{n}+2(\sqrt{n}-1)} \leqslant \frac{5}{2\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$.

【例 1-8】　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$.

【证明】　$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{11,\left[\frac{10M}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{10^n}{n!}-0\right| = \frac{10\times 10\times\cdots\times 10}{1\times 2\times\cdots\times 10}\cdot\frac{10\times\cdots\times 10}{11\times\cdots\times n} < M\frac{10}{n} < \varepsilon.$$

其中 $\frac{10^{10}}{1\times 2\times\cdots\times 10}=M$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$.

【例 1-9】　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$.

【证明】　令 $a=1+h$，$h>0$，则

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

于是 $0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}\to 0\ (n\to\infty)$. 由夹迫准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

【例 1-10】　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$.

【解】 由于$\frac{n+1}{(2n)^2}=\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $=\frac{n+1}{n^2}$，而$\frac{n+1}{(2n)^2}\to 0$，$\frac{n+1}{n^2}\to 0$ $(n\to\infty)$. 由夹逼准则知，原式$=0$.

【例 1-11】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n$.

【解】 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=0$，而$\{\cos n\}$是有界数列，故原式$=0$.

注 本题的典型错误解法是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\cos n=0\cdot\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

【例 1-12】 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，$n=2,3,\cdots$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值.

【证明】 $0<x_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $0<x_n<2$，则 $0<x_{n+1}=\sqrt{2x_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2$. 由归纳法知，$\{x_n\}$有上界. 由$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{\sqrt{2x_{n-1}}}{x_{n-1}}=\sqrt{\frac{2}{x_{n-1}}}\geqslant 1$ 知，$\{x_n\}$是单调上升的. 根据单调有界原理，$\{x_n\}$的极限存在，设为 a. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_{n-1}}$可得，$a=\sqrt{2a}$，解得 $a=2$(舍去 0).

【例 1-13】 求下列极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$.

(2) 由$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}<\frac{n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}(n>1)$得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\mathrm{e}$，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$

§3 函数的极限与连续性

一、基本要求

1. 掌握函数极限定义，会用它们证明函数极限及有关命题.

2. 熟练运用函数极限的运算性质计算、证明有关极限和命题.

3. 掌握利用两个重要极限求极限的方法，掌握函数极限与数列极限的关系.

4. 掌握连续与间断的定义并能确定间断点的类型.

5. 掌握无穷小量的比较与阶.

6. 理解函数的一致连续性概念，会用定义证明函数在区间的一致连续性.

二、主要概念和结论

1. 函数的极限　设 $f(x)$在 x_0 点附近(x_0 点除外)有定义，A 是一定数. 若$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或$f(x)\to A$ $(x\to x_0)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，$\forall \delta>0$，$\exists x_\delta$ 满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$，但 $|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

另外，根据 x 的变化过程，函数极限概念可以进一步推广，如

① 右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

② 左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

③ 无穷大 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$：$\forall G>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>G$.

④ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$：$\forall \varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$：$\forall G>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $f(x)<-G$.

⑥ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$：$\forall G>0$，$\exists \delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有

$|f(x)|>G$.

2. 设在自变量的某个变化过程中，函数的极限为0，则称其为无穷小量.

3. 函数极限的性质(仅以 $x\to x_0$ 为例)

(1) 局部有界性　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\exists\,\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ 有界.

(2) 局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A>0$，则 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$.

(3) 局部保序性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$.

(4) 极限不等式　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$.

(5) 极限惟一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限是惟一的.

(6) 海涅定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任意以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（$A$ 可取无穷大).

4. 函数极限的运算性质

函数极限的四则运算法则、夹迫准则与数列极限类似，不再重复. 下面仅给出几个重要的类似性质.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $\exists\,\delta>0$，$g(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ 有界，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=0.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 单调上升且有上(下)界，则 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ $(\lim\limits_{x\to a^+}f(x))$ 存在；对 $x_0\in(a,\ b)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但不一定相等.

(3) 两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

5. 函数的连续性

(1) 定义　设 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点是连续的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 x_0 点右连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 x_0 点左连续.

从而，$f(x)$在 x_0 点连续$\Leftrightarrow f(x)$在 x_0 点既右连续，又左连续.

若 $\forall x_0\in I$，都有 $f(x)$在 x_0 点连续，则称 $f(x)$在 I 连续.

(2) 间断点　若 $f(x)$在 x_0 点不连续，则称 $f(x)$在 x_0 点间断，x_0 称为间断点.

(3) 间断点的类型　设 x_0 为 $f(x)$的间断点.

① 可去间断点　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

② 第一类间断点　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$；

③ 第二类间断点　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$至少有一个不存在.

6. 无穷小量的比较　设 α，β 为无穷小量.

(1) 若 $\exists A$，$B>0$，使 $0<A\leqslant\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|\leqslant B$，则称 α 与 β 为同阶无穷小量. 需要注意的是，当 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to l\neq 0$ 时，α 与 β 为同阶无穷小量.

(2) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$，则称 α 与 β 为等价无穷小量. 记为 $\alpha\sim\beta$.

(3) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，则称 α 为比 β 高阶的无穷小量，或称 β 是较 α 低阶的无穷小量. 记为 $\alpha=o(\beta)$.

(4) 把 x 作为基本无穷小量，若 $\dfrac{\alpha}{x^k}\to l$ ($l\neq 0$)，称 α 为 x 的 k 阶无穷小量.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-14】　用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$.

【证明】　限制 $|x+1|<1$，则 $-2<x<0$，从而 $|x+3|>1$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,\ 2\varepsilon\}$，则当 $0<|x-(-1)|=|x+1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x+1}{2(x+3)}\right|<\frac{|x+1|}{2}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$.

【例 1-15】 计算极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ （n，m 为正整数）.

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}=\frac{n}{m}.$$

【例 1-16】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的左、右极限.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$.

【例 1-17】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件是对每一个严格上升趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

【证明】 必要性. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，$\forall x>M$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 又设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$（此时 $\{x_n\}$ 可不必严格上升），则对上述 M，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$ 有 $x_n>M\Rightarrow|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

充分性. 用反证法. 设对任何严格上升趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 不成立，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall M>0$，$\exists x>M$ 使得 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $M_1=1$，$\exists x_1>M_1$，使 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $M_2=\max\{2, x_1\}$，$\exists x_2>M_2$，使 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $M_n=\max\{n, x_{n-1}\}$，$\exists x_n>M_n$，使 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

这样可以得到严格上升趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，而 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$，即 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A，矛盾.

注 本例结论是海涅定理对单侧极限的更强的表述形式，同样建立了函数极限与数列极限的密切关系. 对其他类型的单侧极限也有类似的结论.

【例 1-18】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【解】
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【例 1-19】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x$；$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$；$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

分析 在考察函数极限时，要特别注意自变量的变化趋势及同一个函数在不同的自变量的变化趋势下的极限.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x$ 为重要极限，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=1$；

对于$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$，由于$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$x\to 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$；

对于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$，由于$|\sin x|\leqslant 1$，当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to 0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$；

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

【例 1-20】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 方法一 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$.

方法二 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2}{1-x}}=e^2$.

【例 1-21】 证明$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$不存在.

分析 利用海涅定理的逆否命题是证明某些函数极限不存在的有效方法. 对此例，只需找到两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都以 0 为极限，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$不相等即可.

【证明】 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$，则 $x_n\to 0$，$y_n\to 0$（$n\to\infty$）. 易知$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=-1$. 利用海涅定理，故$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$不存在.

【例 1-22】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件是对任何数列 $x_n\to+\infty$（$n\to\infty$），有 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$（A 可取无穷大）.

【证明】 这里仅对 A 为有限数时给出证明.

必要性. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故 $\forall\epsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\epsilon$. 又$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则对上述的 $X>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>X$. 于是$|f(x_n)-A|<\epsilon$. 这就证明了数列 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

充分性. 用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$, 则 $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall X>0$, $\exists\,x_X>X$, 使 $|f(x_X)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 特别地, 取 $X_n=n(n=1,2,\cdots)$, 则相应地 $\exists\,x_n>X_n=n$, 使得 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 于是得到数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to+\infty(n\to\infty)$, 但 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$, 这与 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$ 矛盾.

【例 1-23】 用定义证明函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内连续.

【证明】 易知函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $\forall\,x_0\in(0,+\infty)$, $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2}x_0,\ \dfrac{1}{2}x_0^2\varepsilon\right\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|=\left|2\cos\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|$$

$$=\frac{|x-x_0|}{|x\cdot x_0|}<\frac{2}{x_0^2}|x-x_0|<\varepsilon.$$

这就证明了 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 是连续的. 同理可证其在 $(-\infty,0)$ 也是连续的.

§4　综合例题

【例 1-24】 求证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

【证明】 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $x\in[0,+\infty)$. 易知 $f(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 是单调增加的. 由于 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, 就有 $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$, 于是

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

注　本题可以利用分析法证明, 但比较麻烦.

【例 1-25】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

【证明】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 得, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N_1\in\mathrm{N}^+$, $\forall\,n>N_1$, 有 $|x_n-a|<\varepsilon/2$. 当 $n>N_1$ 时,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \qquad (1)$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left|(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|+\frac{1}{n}(|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|)$$

$$<\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $M=\left|(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|$. 又对上述 $\varepsilon>0$, 取 $N_2=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1$, 则 $\forall n>N_2$, 有 $\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{N_1, N_2\}$, $\forall n>N$, 有 $\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$.

注 (1) 本例的证明方法是一种典型的方法. 为估计(1)式右边, 将其分子分成两部分, 前一部分有 N_1 项, 除以 n 后可任意小(当 n 充分大时); 后一部分放大为 $n-N_1$ 项, 每一项都小于 $\varepsilon/2$. 从而由给定的 ε 最终确定出 N.

(2) 可类似地证明当 $a=+\infty$ 或 $a=-\infty$ 时, 结论仍成立.

【例 1-26】 (斯图茨定理) 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足① $y_{n+1}>y_n$; ② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$; ③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (A 为有限数或无穷大), 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$.

由此证明若 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=a_n(1-a_n)(n=1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

【证明】 仅对 A 为有限数时给出证明. 由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ 知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in\mathbf{N}^+$, 当 $m\geqslant M$ 时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m}-A<\frac{\varepsilon}{2},$$

即对 $m=M, M+1, \cdots$, 有

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1}-y_m)<x_{m+1}-x_m<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1}-y_m).$$

分别以 $m=M, M+1, \cdots, n-1$ 代入上式, 并将得到的 $n-M$ 个不等式相加, 得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_M)<x_n-x_M<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_M),$$

即 $\left|\frac{x_n-x_M}{y_n-y_M}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, $\exists N>M$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<1-\frac{y_M}{y_n}<1$ 及

$\left|\dfrac{x_M - Ay_M}{y_n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 由恒等式$\dfrac{x_n}{y_n} - A = \left(1 - \dfrac{y_M}{y_n}\right)\left(\dfrac{x_n - x_M}{y_n - y_M}\right) + \dfrac{x_M - Ay_M}{y_n}$知，$\forall n > N$，有$\left|\dfrac{x_n}{y_n} - A\right| < \varepsilon$. 这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = A$.

用数学归纳法容易证明$0 < a_n < 1$. 由条件$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n < 1$，知$\{a_n\}$单调下降趋于0，于是$\dfrac{1}{a_n} \to +\infty\ (n\to\infty)$. 令$x_n = n$，$y_n = \dfrac{1}{a_n}$，则$y_n < y_{n+1}$，由斯图茨定理得，

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}a_n}{a_n - a_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2(1 - a_n)}{a_n^2} = \lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 1.$$

注 (1) 斯图茨定理实质上是已知数列$\{x_n\}$与正无穷大数列$\{y_n\}$的各自相邻两项增长率之比的极限，来求得$\dfrac{x_n}{y_n}$的极限. 这与求函数极限时的洛必达法则非常相似，即用$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$来导出$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限$\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)$. 可以认为斯图茨定理与洛必达法则是数学分析中处理待定型极限的两个重要工具，它们分别适用于变量为“离散的”和“连续的”的情形.

(2) 斯图茨定理也有相应于$\dfrac{0}{0}$型的结论.

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (a 可为$+\infty$或$-\infty$). 令$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$y_n = n$，对$\{x_n\}$和$\{y_n\}$应用斯图茨定理，就得到了例 1-25 的结果.

【例 1-27】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$.

【解】 方法一 用数学归纳法证明$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

当 $n = 1$，因为$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，不等式成立；

设 $n = k$ 时，不等式成立，即$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$. 对于 $n = k+1$，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$，即证$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$. 而此不等式是恒成立的. 于是，对于 $n=k+1$ 不等式也成立. 由归纳法得$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

因为$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0$，故原式$=0$.

方法二　令 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，则 $x_n^2=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}$.

于是，有

$$0<x_n^2=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-1)}{(2n)^2}<\frac{2n-1}{(2n)^2}\to 0$$

故原式$=0$.

【例 1-28】（电子科技大学　2003 年考研试题）设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，$-\infty<x<+\infty$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

【解】

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\ 0, & |g(x)|=1\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0\end{cases}$$

$$g(f(x))=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ e^0=1, & |x|=1.\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

【例 1-29】（复旦大学　1999 年考研试题(以下注明某高校的均为考研试题)）下列命题若正确，给出证明，否则举出反例.

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中至少有一个为无穷小量(即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$).

(2) 设数列$\{a_n\}$为无穷大量，又数列$\{b_n\}$满足$|b_n|>0$，$n\geqslant 1$，则数列$\{a_nb_n\}$为无穷小量.

【解】（1）错误. 如设 $a_n=1+(-1)^n$，$b_n=1-(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=$

$\lim\limits_{n\to\infty}[1-(-1)^{2n}]=0$. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n]$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[1-(-1)^n]$都不存在.

(2) 错误. 如设 $a_n=n$, $b_n=\dfrac{1}{n}$, 则$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足条件, 而 $a_nb_n=1$, 即知$\{a_nb_n\}$非无穷小量.

【例 1-30】 (复旦大学 1999 年)当 $x\to0$ 时, $f(x)=1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$是多少阶无穷小量($a$ 为参数)?

【解】
$$f(x)=1-\left[1-\frac{1}{2!}\sin^2x+\frac{1}{4!}\sin^4x+o(x^6)\right]+a\left[x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^6)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^5)\right]^2-\frac{1}{24}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^5)\right]^4+ax^2-\frac{a}{2}x^4+o(x^6)$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^2-\frac{2}{6}x^4+o(x^6)\right]-\frac{1}{24}[x^4+o(x^6)]+ax^2-\frac{a}{2}x^4+o(x^6)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2-\left(\frac{5}{24}+\frac{a}{2}\right)x^4+o(x^6).$$

若$\dfrac{1}{2}+a\neq0$, 即 $a\neq-\dfrac{1}{2}$时, $f(x)$为 x 的 2 阶无穷小; 若$\dfrac{1}{2}+a=0$, 即 $a=-\dfrac{1}{2}$时, 则$-\left(\dfrac{5}{24}+\dfrac{a}{2}\right)=-\left(\dfrac{5}{24}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{24}\neq0$, 此时 $f(x)$为 x 的 4 阶无穷小.

【例 1-31】 (电子科技大学 2001 年)求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}$, a, b, c, h, k 均为常数, a, $h\neq0$.

【解】
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{b}{ax}\right)^{hx+k}}{\left(1+\dfrac{c}{ax}\right)^{hx+k}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b}\cdot\frac{b}{ax}(hx+k)}}{\left(1+\dfrac{c}{ax}\right)^{\frac{ax}{c}\cdot\frac{c}{ax}(hx+k)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{bh}{a}}\cdot e^{\frac{bk}{ax}}}{e^{\frac{ch}{a}}\cdot e^{\frac{ck}{ax}}}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

【例 1-32】 (电子科技大学 2003 年) 若 $a>0$, $b>0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-$

$b^{\frac{1}{x}}$).

【解】 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$ 时，$t\to0^+$．于是

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to0^+}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

【例 1-33】（浙江大学 1999 年）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}$.

【解】
$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n}\ln n}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^x-1}{-x\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^x}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\ln x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^x}{1+\ln x}=\lim_{y\to+\infty}y^{\frac{1}{y}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$$

【例 1-34】（浙江大学 1999 年）设函数 $f(t)$在(a,b)连续，若有数列 $x_n\to a$，$y_n\to a$（x_n，$y_n\in(a,b)$）使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=B$，则对 A，B 之间的任意数 μ，可找到数列 $z_n\to a$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\mu$.

【证明】 不妨设 $A<B$，则 $A<\mu<B$．因 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则对 $\epsilon_1=\frac{\mu-A}{2}>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|f(x_n)-A|<\epsilon_1\Rightarrow f(x_n)<A+\epsilon_1=A+\frac{\mu-A}{2}=\frac{\mu+A}{2}<\mu.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=B$，则对 $\epsilon_2=\frac{B-\mu}{2}>0$，$\exists N_2\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N_2$ 时，有

$$|f(y_n)-B|<\epsilon_2\Rightarrow f(y_n)>B-\epsilon_2=B-\frac{B-\mu}{2}=\frac{B+\mu}{2}>\mu.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有 $f(x_n)<\mu<f(y_n)$．又 $f(t)$在(a,b)连续，则 $f(t)$在$[x_n,y_n]$或$[y_n,x_n]$连续．根据连续函数的介值定理，知 $\exists w_n\in[x_n,y_n]$或$[y_n,x_n]$，使 $f(w_n)=\mu$．于是，只要取 $z_n=x_n(n\leqslant N)$，$z_n=w_n(n>N)$，就有 $f(z_n)\to\mu(n\to\infty)$.

【例 1-35】（浙江大学 2000 年）设 $x_0=a$，$x_1=b$，$x_n=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$，$n=2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 $x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}-x_{n-1}=-\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}$，反复应用此结果，有

$$x_n - x_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1 - x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(b-a),\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

于是
$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a) + \cdots + (b-a) + a \\ &= (b-a)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + a \to \frac{3}{2}(b-a) + a = \frac{3b-a}{2}. \end{aligned}$$

【例 1-36】 (浙江大学 2001 年)用"ε-N"语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}$.

【证明】 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{10,\ \left[\frac{6}{\varepsilon}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5n-6}{3(3n^2+2n-3)}\right| < \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n} < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}$.

【例 1-37】 (浙江大学 2001 年)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

【解】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+n})] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+n}-2n\pi)] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos2\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos\pi) = 1. \end{aligned}$$

【例 1-38】 (浙江大学 2002 年)用"ε-δ"语言证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$.

【证明】 限制 $|x-1|<1$, 则 $0<x<2$, 从而 $|x-2|<2$, $|x-3|>1$. 于是, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|<2|x-1|<\varepsilon$. 这就证明了结论.

【例 1-39】 (浙江大学 2002 年) 给出一个一元函数 f, 在有理点都不连续、在无理点都连续, 并证明之.

【解】 取 $f(x)=R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\ p,\ q\text{ 互质},\ q>p \\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$. 下面证 $\forall x_0 \in(-\infty,\ +\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. $\forall\varepsilon>0$, 取充分大的 q_0, 使 $\frac{1}{q_0}<\varepsilon$, 易知, 在

$(x_0-1,\ x_0+1)$中，使得$0<q\leqslant q_0$的分数只有有限多. 因此总能取到充分小的$\delta>0$，使$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$中的有理数分母$q>q_0$. 故当$x$满足$0<|x-x_0|<\delta$时，则$R(x)=0$. 当有理数$x=\dfrac{p}{q}$满足$0<|x-x_0|<\delta$时，必有$q>q_0$，因而$0\leqslant R(x)=\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$，这就证明了$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. 于是，$f$在有理点都不连续、在无理点都连续.

【例 1-40】（浙江大学　2002年）设$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$，数列$\{x_n\}$由如下递推公式定义$x_0=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

分析　假设极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，值为$a$，则$a=\dfrac{a+2}{a+1}$，$a^2=a\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$. 因$x_n>0$，负数不合题意，故$a=\sqrt{2}$. 下面研究$x_n$的分布情况.

若$x_n<\sqrt{2}$，则$x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}>1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$；

若$x_n>\sqrt{2}$，则$x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}=1+\dfrac{1}{1+x_n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$.

即x_n在$\sqrt{2}$的左右来回跳动，而$x_0=1<\sqrt{2}$，故$x_0,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2n},\ \cdots<\sqrt{2}$；$x_1,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2n+1},\ \cdots>\sqrt{2}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. 从而考虑证$\{x_{2n}\}$单调上升收敛于$\sqrt{2}$，$\{x_{2n+1}\}$单调下降收敛于$\sqrt{2}$.

【证明】　考察$x_{n+2}-x_n$的符号，

$$x_{n+2}-x_n=\frac{2+x_{n+1}}{1+x_{n+1}}-x_n=1+\frac{1}{1+x_{n+1}}-x_n=1+\frac{1}{1+\dfrac{2+x_n}{1+x_n}}-x_n$$

$$=1+\frac{1+x_n}{3+2x_n}-x_n=\frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n}=\frac{2(\sqrt{2}+x_n)(\sqrt{2}-x_n)}{3+2x_n}\begin{cases}>0, & x_n<\sqrt{2}\\ <0, & x_n>\sqrt{2}\end{cases}.$$

由$x_{2n}<\sqrt{2}$，$x_{2n+1}>\sqrt{2}(n=0,1,2,\cdots)$知，$\{x_{2n}\}$单调上升有上界$\sqrt{2}$，$\{x_{2n+1}\}$单调下降有下界$\sqrt{2}$. 应用单调有界原理，$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$都收敛. 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\beta$. 在$x_{2n+2}=\dfrac{2+x_{2n+1}}{1+x_{2n+1}}$及$x_{2n+1}=\dfrac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}$两端取极限分别得$\alpha=\dfrac{2+\beta}{1+\beta}$，$\beta=\dfrac{2+\alpha}{1+\alpha}$. 解得$\alpha=\beta=\sqrt{2}$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【例 1-41】（东南大学　2003年）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$.

【解】 $S_1=1^2+2^2+\cdots+(2n)^2=\frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1)$,

$$S_2=2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=2^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=S_1-S_2=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1),$$

$$\text{故原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3n^3}=\frac{4}{3}.$$

【例 1-42】（东南大学 2003 年）设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，证明$\{x_n\}$收敛并求其极限.

【证明】 方法一 若 $x_1=\sqrt{2}$，则 $x_n=\sqrt{2}$（$n=2,3,\cdots$）. 从而$\{x_n\}$收敛且极限为$\sqrt{2}$. 设 $f(x)=\frac{2(1+x)}{2+x}$，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$为严格单调上升函数. 设 $x_1>\sqrt{2}$，则由 $x_{n+1}=f(x_n)>f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$知，$\forall n\in\mathrm{N}^+$，$x_n>\sqrt{2}$. 由 $x_{n+1}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2+x_n}<0$ 知，$\{x_n\}$单调下降. 同理可知，当 $x_1<\sqrt{2}$时，$\forall n\in\mathrm{N}^+$，$x_n<\sqrt{2}$，且$\{x_n\}$单调增加. 总之，$\{x_n\}$单调有界，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为 a. 在 $x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$两端取极限得，$a=\frac{2(1+a)}{2+a}$，解得 $a=\sqrt{2}$.

方法二 设 $f(x)=\frac{2(1+x)}{2+x}$. 因 $x_n>0$，由于 $f'(x)=\frac{2}{(2+x)^2}<\frac{1}{2}<1$，$\forall x\in(0,+\infty)$，$x_{n+1}=f(x_n)$为压缩映象，从而$\{x_n\}$收敛，同“方法一”可求得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【例 1-43】（东南大学 2004 年）判断题：连续函数把有限闭区间映成有限闭区间，即若函数 $f:[a,b]\to R$ 连续，则 $f([a,b])$也必定是某个有限闭区间$[c,d]$.

【解】 正确. 因 $f(x)$在$[a,b]$连续，由最值定理知，$f(x)$在$[a,b]$必能达到最大值 d 和最小值 c. 不妨设 $f(a)=c$，$f(b)=d$. 由介值定理知，$\forall\mu\in(c,d)$，$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=\mu$.

【例 1-44】（上海交通大学 1999 年）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}$.

【解】 考察幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

所以该幂级数的收敛半径为$\frac{1}{\mathrm{e}}$，而$\frac{1}{3}<\frac{1}{\mathrm{e}}$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛，根据级数收敛的必要条件得，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}=0$.

【例 1-45】 （上海交通大学　1999 年）判断题：若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且有界，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 必一致连续.

【解】　错误. 例如，$f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且 $|f(x)|\leqslant 1$. 若取 $x'_n=\sqrt{2n\pi}$，$x''_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$|x'_n-x''_n|=\left|\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+(\pi/2)}}\to 0\ (n\to\infty).$$

而 $|f(x'_n)-f(x''_n)|=\left|\sin 2n\pi-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1\not\to 0$. 这说明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.

【例 1-46】 （上海交通大学　2000 年）判断题：$f(x)$ 在 (a,b) 内连续的充要条件是对 $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致连续.

【证明】　正确. 必要性. 因 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，而 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，于是 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，根据康托定理，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致连续.

充分性. $\forall x_0\in(a,b)$，取 $\alpha=\frac{a+x_0}{2}$，$\beta=\frac{x_0+b}{2}$，则 $x_0\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. 而 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致连续，故 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，从而 $f(x)$ 在 x_0 点连续. 由 x_0 的任意性，知 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

【例 1-47】 （上海交通大学　2003 年）设对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)=f(x^2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续. 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为常数.

【证明】　设 $x>0$，由 $f(x)=f(x^2)$，有 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$，因此 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$；当 $x<0$ 时，$f(x)=f(x^2)=f(1)$；$x=0$ 时，$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=f(1)$. 故 $f(x)\equiv f(1)$（常数）.

【例 1-48】 （上海交通大学　2003 年）已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0\ (n\geqslant 2)$，且 $f(x)=\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，求 $\lim_{x\to0}f(x)$.

【解】　$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \exp\left\{ \frac{1}{x} \ln \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right\}$$

$$= \exp\left\{ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a_1^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x} \right\}$$

$$= \exp\left\{ \lim_{x \to 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + \cdots + a_n^x} \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} \right\} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

第二章　实数理论的基本定理

整个数学分析是建立在实数理论与极限理论基础上的，有关实数理论的一些基本定理对学习数学分析的学生来说既是一个重点，又是一个难点．它是一元函数数学分析理论的总结和提高，是以后进一步学习的必备条件．

§1　实数连续性及其等价描述

一、基本要求

1．理解实数集的确界，覆盖，区间套，子数列，柯西基本列的概念．

2．掌握实数连续性的概念及实数基本定理(戴德金实数连续性定理)，掌握确界存在原理、单调有界原理、有限覆盖定理、区间套定理、紧致性定理、柯西收敛原理，理解它们的相互等价性，掌握相互证明的基本思路和方法．

3．掌握应用上述定理证明闭区间上连续函数的性质(有界性定理、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性定理)的基本思路和方法．

二、主要概念和结论

1．几个有关定义

(1) 戴德金连续性准则　如果一个有大小顺序的稠密的数系 S，对它的任一个分划，都有 S 中惟一的数存在，它不小于下类中的每个数，也不大于上类中的每一个数，那么称数系 S 是连续的

(2) 上、下确界　设 A 是非空实数集，$\beta\in \mathrm{R}$，若① $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\beta$；② $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$．则称 β 为 A 的上确界，记为 $\beta=\sup A$ 或 $\beta=\sup\limits_{x\in A}\{x\}$．

类似地，称 α 为数集 A 的下确界，如果① $\forall x\in A$，有 $x\geqslant\alpha$；② $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$．

(3) 区间套　设 $\{[a_n,\ b_n]\}$ 是一组实数的闭区间构成的序列，满足

① $[a_{n+1},\ b_{n+1}]\subset[a_n,\ b_n]$，$n=1,\ 2,\ \cdots$；② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称

$\{[a_n, b_n]\}$构成一个区间套.

(4) 覆盖　设 E 是一开区间集(即 E 的元素为开区间), S 是一实数集合, 如果 $\forall x\in S$, 存在区间 $(a, b)\in E$, 使得 $x\in(a, b)$, 则称 E 是 S 的一个覆盖.

(5) 柯西基本列　在数系 S 中, 若数列 $\{x_n\}\subset S$ 满足 $\forall \epsilon>0$, $\exists N\in \mathrm{N}^+$, $\forall n, m>N$, 有 $|x_n-x_m|<\epsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 S 的柯西基本列, 简称基本列.

(6) 完备性　如果数系 S 中的每个基本列都在 S 中存在极限, 则称 S 是完备的.

2. 实数连续性的基本定理

(1) 实数基本定理(戴德金实数连续性定理)　实数系 R 按戴德金连续性准则是连续的. 即对 R 的任一分划 $A|B$, 都存在惟一的实数 r, 它大于或等于下类 A 的每一个实数, 小于或等于上类 B 中的每一个实数.

(2) 确界存在原理　在实数系 R 内, 非空的有上(下)界的数集必有上(下)确界存在.

(3) 单调有界原理　单调上升(下降)有上(下)界的数列必有极限.

(4) 有限覆盖定理　闭区间 $[a, b]$ 的任一个覆盖, 必存在有限的子覆盖.

(5) 区间套定理　设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 则必存在惟一的实数 r, 属于每一个闭区间 $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \cdots$, 即 $r\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

(6) 紧致性定理　有界数列必有收敛的子数列(又称致密性定理或魏尔斯特拉斯定理).

(7) 柯西收敛原理　数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathrm{N}^+$, $\forall n, m>N$, $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

数列 $\{x_n\}$ 不收敛 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$, $\forall N\in \mathrm{N}^+$, $\exists n_0, m_0>N$, 使 $|x_{n_0}-x_{m_0}|\geqslant \varepsilon_0$.

(8) 聚点原理　有界无穷点集至少有一聚点.

以上 8 个定理从不同角度描述了实数的连续性, 它们之间是相互等价的. 确界存在原理与戴德金实数连续性定理事实上可以归结为一个定理, 很多教材是从确界存在原理出发而展开整个极限理论讨论的, 所以它们一起被称为实数连续性定理.

收敛数列必有界, 反之则不然. 单调有界原理、紧致性定理和聚点原理进一步说明了数列收敛与有界之间的深层次联系. 有界数列虽不一定收敛, 但一定有收敛的子列. 有界数列若单调则必然收敛. 而数列收敛的充要条件, 或者说其本质属性是该数列成为柯西基本列.

区间套定理和有限覆盖定理刻画了局部性质和整体性质之间的关系．区间套定理通过构造满足某种性质的区间套，从而推出某点的局部性质．而有限覆盖定理则恰恰相反，通过肯定或否定局部性质而获得整体性质．用这两种方法证明题目时，注意多体会其中的思想．

三、常用解题方法与典型例题

【例 2-1】 求数列 $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$ 的上、下确界．

【解】 考虑数列 $x'_n=(1+2^n)^{\frac{1}{n}}$，因为

$$\frac{x'_{n+1}}{x'_n}=\frac{(1+2^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{(1+2^n)^{\frac{1}{n}}}=\left[\frac{(1+2^{n+1})^n}{(1+2^n)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}<\left[\frac{(1+2^{n+1})^n}{(2+2^n)^n}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}<1,$$

所以 $\{x'_n\}$ 单调下降，从而 $\{x_{2k}\}$ 单调下降．同理 $x''_n=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}(1+2^n)^{\frac{1}{n}}$ 也单调下降．于是 $\{x_{2k-1}\}$ 单调下降．又因为 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\sqrt{5}$，$x_2>x_1$，故 $\sup\{x_n\}=\sqrt{5}$．而 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=2$，故 $\inf\{x_n\}=1$．

(这里用到 $2=(2^n)^{\frac{1}{n}}<(1+2^n)^{\frac{1}{n}}<(2^n+2^n)^{\frac{1}{n}}=2\cdot\sqrt[n]{2}\to 2$，$n\to\infty$)．

【例 2-2】 设 $\beta=\sup E$，且 $\beta\notin E$，试证自 E 中可选取数列 $\{x_n\}$ 且 x_n 互不相同，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$；又若 $\beta\in E$，则情形如何？

【证明】 (1) 由于 $\beta=\sup E$，且 $\beta\notin E$，则有① $\forall x\in E$，有 $x<\beta$；② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in E$，使 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$．

取 $\varepsilon_1=1$，则 $\exists x_1\in E$，使 $\beta-1<x_1<\beta$；

$$\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},\ \beta-x_1\right\}，则\ \exists x_2\in E，使\ \beta-\varepsilon_2<x_2<\beta;\cdots$$

如此下去，便得到一数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in E$，$\beta-\frac{1}{n}<x_n<\beta$，$x_{n-1}<x_n<\beta$，$n=1,2,\cdots$．从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$．

(2) 对于 $\beta\in E$ 情形，则上述结果不成立．

如 $E_1=[1,2]$，则 $\beta=\sup E_1=2\in E_1$．可取 $x_n=2-\frac{1}{n}\in[1,2]$，则有各 x_n 互不相同且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2=\beta$．

如 $E_2=\{1,2\}$，则 $\beta=\sup E_2=2\in E_2$，但却找不到互不相同的 $x_n\in\{1,2\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2=\beta$．

【例 2-3】 若$\{x_n\}$无界，且非无穷大量，则必存在两个子列 $x_{n_k}\to\infty$，$x_{m_k}\to a$（a 为有限数）$(k\to\infty)$.

【证明】 因$\{x_n\}$无界，故$\forall G>0$，$\exists n_G\in\mathbf{N}^+$，使得$\left|x_{n_G}\right|>G$. 特别，

取 $G=1$，则$\exists n_1\in\mathbf{N}^+$，使得$\left|x_{n_1}\right|>1$；

取 $G=2$，则$\exists n_2\in\mathbf{N}^+$，$n_2>n_1$，使得$\left|x_{n_2}\right|>2$；…

如此继续下去，便得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，显然 $x_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$. 又$\{x_n\}$非无穷大量，所以$\exists M>0$，$\forall N\in\mathbf{N}^+$，$\exists n_N>N$，使$\left|x_{n_N}\right|\leqslant M$. 于是在$[-M, M]$内含有$\{x_n\}$中无穷多项，按照它们在$\{x_n\}$中的顺序组成了一新的数列. 注意它是$\{x_n\}$的子列且有界，根据紧致性定理，该子列必有收敛的子列$\{x_{m_k}\}$，设 $x_{m_k}\to a\in[-M, M](k\to\infty)$即可.

【例 2-4】 有界数列$\{x_n\}$若不收敛，则必存在两个子列 $x_{n_k}\to a$，$x_{m_k}\to b$ 且$a\neq b$.

【证明】 不妨设 $\alpha\leqslant x_n\leqslant\beta$，$n=1, 2, \cdots$. 由紧致性定理，$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$且 $x_{n_k}\to a\in[\alpha, \beta](k\to\infty)$. 下面证明存在另一个子列$\{x_{m_k}\}$收敛，但其极限异于 a. 若$\forall\varepsilon>0$，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之外只有有限个 x_n，则 $x_n\to a(n\to\infty)$，这与$\{x_n\}$发散矛盾. 从而$\exists\varepsilon_0>0$，使在$(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$之外有无穷多个 x_n，于是把落在$(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$之外的 x_n 按它们在$\{x_n\}$中的顺序重新组成一新的数列，它是$\{x_n\}$的子列，从而有界. 所以此新数列中必有一收敛子列，记为$\{x_{m_k}\}$，设 $x_{m_k}\to b(k\to\infty)$，则 $b\neq a$. $\{x_{m_k}\}$也是$\{x_n\}$的子列.

【例 2-5】 设 $f(x)$在$[a, b]$定义，且在每一点处函数的极限存在，求证 $f(x)$在$[a, b]$有界.

【证明】 用有限覆盖定理. 因为$\forall x_0\in[a, b]$，$f(x)$在 x_0 有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在（若 $x_0=a$ 或 b，考虑其右极限或左极限），由函数极限的局部有界性定理知，$\exists\delta_0>0$，$M_0>0$，$\forall x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\cap[a, b]$，$|f(x)|\leqslant M_0$. 构造开区间族

$$E=\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\mid x\in[a, b]\},$$

则 E 为$[a, b]$的一个覆盖. 由有限覆盖定理知，可以从 E 中选出有限个开区间覆盖$[a, b]$，记为

$$(x_1-\delta_1, x_1+\delta_1), (x_2-\delta_2, x_2+\delta_2), \cdots, (x_k-\delta_k, x_k+\delta_k).$$

又当 $x\in(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\cap[a, b]$时，有$|f(x)|\leqslant M_i$，$i=1, 2, \cdots, k$. 取$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{M_i\}$，则$\forall x\in[a, b]$，$|f(x)|\leqslant M$. 故 $f(x)$在$[a, b]$有界.

【例 2-6】 求证数列 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在.

【证明】 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall N\in\mathbf{N}^+$, 取 $n_0=N+1$, $m_0=2n_0$, 则 n_0, $m_0>N$;

$$\left|x_{m_0}-x_{n_0}\right|=\frac{1}{\sqrt{n_0+1}}+\frac{1}{\sqrt{n_0+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n_0}}\geqslant\frac{n_0}{\sqrt{2n_0}}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

由柯西收敛原理知, $\{x_n\}$不收敛.

【例 2-7】 设 $f(x)$在$(a,+\infty)$可导, $|f'(x)|$单调下降, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在, 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

【证明】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在, 根据柯西收敛原理, $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>\max\{0,a\}$, $\forall x>X$,有$|f(2x)-f(x)|<\varepsilon$. 因为 $f(x)$在$(a,+\infty)$可导, 对任意的 $x>X$, $f(x)$在$[x,2x]$满足拉格朗日中值定理的条件, 故$\exists\xi\in(x,2x)$, 使

$$f(2x)-f(x)=f'(\xi)(2x-x)=xf'(\xi).$$

由于$|f'(x)|$单调下降, 而 $\xi<2x$, 故$|f'(2x)|\leqslant|f'(\xi)|$. 所以当 $x>X$ 时, $|xf'(2x)|\leqslant|xf'(\xi)|=|f(2x)-f(x)|<\varepsilon$, 即$|2xf'(2x)|<2\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

【例 2-8】 利用柯西收敛原理讨论数列 $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$的收敛性.

【解】 $\forall n,\ p\in\mathbf{N}^+$,

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+3}\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p+1}\frac{1}{n+p}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|.$$

若 p 为奇数, 则有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\right|<\frac{1}{n+1};$$

若 p 为偶数, 则有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}\right|<\frac{1}{n+1}.$$

于是$\forall \epsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$，$\forall n>N$，$\forall p\in \mathrm{N}^+$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n+1}<\epsilon.$$

由柯西收敛原理知，$\{x_n\}$收敛.

【例 2-9】 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$可导，且$|f'(x)|\leqslant k<1$，任给x_0，令

$$x_{n+1}=f(x_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

求证(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；(2) 上述极限为$x=f(x)$的根，且是惟一的.

【证明】 (1) $\forall x', x''\in(-\infty, +\infty)$，$f(x)$在$[x', x'']$或$[x'', x']$满足拉格朗日中值定理的条件，故存在$\xi$介于$x'$与$x''$之间，使得$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)(x'-x'')|$. 又$|f'(x)|\leqslant k<1$，从而$|f(x')-f(x'')|\leqslant k|x'-x''|$. 所以，

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|=k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$\leqslant k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_1-x_0|,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

于是$\forall m>n$，

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\leqslant|x_1-x_0|(k^{m-1}+k^{m-2}+\cdots+k^n)\leqslant\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|\to 0\ (n\to\infty).$$

由柯西收敛原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r$，由$x_{n+1}=f(x_n)$及$f(x)$在$r$点的连续性得，$r=f(r)$. 因此$r$是$x=f(x)$的根(称$r$为$f(x)$的不动点). 若有$r'\neq r$也是$x=f(x)$的根，则有$0<|r'-r|=|f(r')-f(r)|\leqslant k|r'-r|<|r'-r|$. 矛盾.

【例 2-10】 设$f(x)$在$[a, b]$满足条件

(1) 存在$0<k<1$使得$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$，$\forall x, y\in[a, b]$；

(2) $f(x)$的值域包含在$[a, b]$内.

则对任意$x_0\in[a, b]$，令$x_{n+1}=f(x_n)(n=0, 1, 2, \cdots)$，有

① $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；

② 方程$x=f(x)$的解在$[a, b]$是惟一的，这个解就是上述极限值.

【证明】 由$f([a, b])\subset[a, b]$知，$\{x_n\}\subset[a, b]$.

$$|x_n-x_{n+p}|=|f(x_{n-1})-f(x_{n+p-1})|\leqslant k|x_{n-1}-x_{n+p-1}|$$

$$\leqslant k^2|x_{n-2}-x_{n+p-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_0-x_p|\leqslant k^n|a-b|=k^n(b-a).$$

因此$\forall \epsilon>0$，取$N=\left[\frac{\ln\epsilon-\ln(b-a)}{\ln k}\right]+1$，则当$n>N$时，$\forall p\in\mathrm{N}^+$，就有

$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. 根据柯西收敛原理，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$，则 $r\in[a, b]$. 从不等式 $|f(x_n) - f(r)| \leqslant k|x_n - r|$ 可得，数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(r)$. 在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边令 $n\to\infty$，得 $r = f(r)$. 因此 r 是 $x = f(x)$ 的根. 如果 $x = f(x)$ 在 $[a, b]$ 还有根 $r' \neq r$，即 $r' = f(r')$，则有 $|r - r'| = |f(r) - f(r')| \leqslant k|r - r'| < |r - r'|$，矛盾. 故 r 是 $x = f(x)$ 在 $[a, b]$ 惟一的根.

注　本题要证明的结论并不需要函数 $f(x)$ 的连续性. 另外，例 2-9 和例 2-10 是压缩映象原理即巴拿赫不动点原理的两种具体表述.

§2　闭区间上连续函数的性质

一、基本要求

1. 理解函数的一致连续性概念.
2. 掌握闭区间上连续函数的性质及其证明方法.

二、主要概念和结论

1. 一致连续的定义　设函数 $f(x)$ 在集合 I 定义，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x_1, x_2 \in I$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 I 一致连续.

函数 $f(x)$ 在 I 不一致连续 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists x_1, x_2 \in I$，使 $|x_1 - x_2| < \delta$，$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

2. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(2) 零点存在定理　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，$M = \max\limits_{x\in[a, b]} f(x)$，$m = \min\limits_{x\in[a, b]} f(x)$，则 $\forall c \in [m, M]$，$\exists \xi \in [a, b]$，使 $f(\xi) = c$.

(3) 最值定理　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最大值与最小值.

(4) 一致连续性定理(康托定理)　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续.

三、常用解题方法与典型例题

【例 2-11】 设 $f(x)$在$[a, b]$连续，并且最大值点 x_0 是惟一的，又设 $x_n\in[a, b]$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

【证明】 用反证法. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq x_0$，则$\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbf{N}^+$，$\exists\, n>N$，使$|x_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0$. 这说明在$(x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0)$之外有无穷多个 x_n. 由于它们是有界的，根据紧致性定理，存在$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设 $x_{n_k}\to r\in[a, b]$ $(k\to\infty)$，这时 $r\neq x_0$. 又 $f(x)$在 r 点连续，故$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(r)$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，故$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$. 根据极限的惟一性，$f(r)=f(x_0)$. 又因为 x_0 是惟一的最大值点，而 $r\neq x_0$，所以 $f(r)<f(x_0)$. 矛盾.

【例 2-12】 设 $f(x)$在$[0, 2a]$连续，且 $f(0)=f(2a)$，求证$\exists\,x_0\in[0, a]$，使 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

【证明】 作辅助函数 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，$x\in[0, a]$. 由于 $f(x)$在$[0, 2a]$连续，因此 $F(x)$在$[0, a]$连续，$F(0)=f(a)-f(0)$，$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)$. 若 $F(0)=-F(a)=0$，则只要取 $x_0=0$ 或 $x_0=a$，便有 $f(x_0)=f(x_0+a)$. 若 $F(0)=-F(a)\neq0$，则 $F(0)\cdot F(a)=-F^2(0)<0$，由零点存在定理，$\exists\,x_0\in[0, a]$，使 $F(x)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

【例 2-13】 设 $f(x)$在$[a, b]$连续，且取值为整数，求证 $f(x)\equiv$常数.

【证明】 用反证法. 假设$\exists\,x_1, x_2\in[a, b]$，$x_1\neq x_2$，使 $f(x_1)=N_1$，$f(x_2)=N_2$，其中 $N_1<N_2$，$N_1, N_2\in\mathbf{N}^+$. 不妨设 $x_1<x_2$，作辅助函数

$$F(x)=f(x)-N_1-\frac{1}{2},\ x\in[x_1, x_2]\subset[a, b].$$

则 $F(x_1)=f(x_1)-N_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$，$F(x_2)=f(x_2)-N_1-\frac{1}{2}=N_2-N_1-\frac{1}{2}\geqslant1-\frac{1}{2}>0$. 由 $f(x)$在$[a, b]$连续知，$F(x)$在$[x_1, x_2]$连续. 于是根据零点存在定理，$\exists\,x_0\in(x_1, x_2)\subset[a, b]$，使 $F(x_0)=f(x_0)-N_1-\frac{1}{2}=0$，即 $f(x_0)=N_1-\frac{1}{2}$. 而 $N_1-\frac{1}{2}$不是整数，矛盾.

【例 2-14】 设 $f(x)$在(a, b)一致连续，$a, b\neq\pm\infty$，证明 $f(x)$在(a, b)有界.

【证明】 由于 $f(x)$在(a, b)一致连续，由例 2-24 知，$f(a+0)$，$f(b-0)$均存在. 定义

$$f(a)=f(a+0),\ f(b)=f(b-0),$$

则 $f(x)$在$[a, b]$连续，由有界性定理，知 $f(x)$在$[a, b]$有界，从而 $f(x)$在(a, b)有界.

注　当 $a=-\infty$或 $b=+\infty$时，结论不成立. 例如，$f(x)=x$ 在$(-\infty, +\infty)$一致连续，但它在$(-\infty, +\infty)$无界.

【例 2-15】 用一致连续的定义证明若函数 $f(x)$在$[a, c]$和$[c, b]$都一致连续，则 $f(x)$在$[a, b]$一致连续.

【证明】 因 $f(x)$在$[a, c]$和$[c, b]$一致连续，故$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，$\forall x'$，$x''\in[a, c]$，当$|x'-x''|<\delta_1$时，有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$；$\exists \delta_2>0$，$\forall x'$，$x''\in[c, b]$，当$|x'-x''|<\delta_2$时，有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，$\forall x'$，$x''\in[a, b]$，$x'<x''$，$|x'-x''|<\delta$. 若 $x'<c<x''$，则从$|x'-x''|<\delta$推出$|x'-c|<\delta_1$，$|x''-c|<\delta_2$，因此

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(c)|+|f(x'')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

对于其他情形，x'，x''或同属于$[a, c]$或同属于$[c, b]$，当然有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 这就证明了 $f(x)$在$[a, b]$一致连续.

注　类似可证若函数 $f(x)$在$(a, c]$和$[c, b)$都一致连续，则 $f(x)$在(a, b)一致连续，且当 $a=-\infty$或 $b=+\infty$时，结论仍成立.

【例 2-16】 设 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在. 证明 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$一致连续.

【证明】 设$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. 则$\forall \varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x<-X_1$时，有$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$；$\exists X_2>0$，当 $x>X_2$时，有$|f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又由康托定理知，$f(x)$在$[-X_1-1, X_2+1]$一致连续，故$\exists \delta_1>0$，$\forall x'$，$x''\in[-X_1-1, X_2+1]$，当$|x'-x''|<\delta_1$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 因此$\forall \varepsilon>0$，取$\delta=\min\{\delta_1, 1\}$，则当 x'，$x''\in(-\infty, +\infty)$且$|x'-x''|<\delta$时，必有 x'，x''或同属于$[-X_1-1, X_2+1]$，或同属于$(-\infty, -X_1)$，或同属于$(X_2, +\infty)$. 若 x'，$x''\in[-X_1-1, X_2+1]$，则$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；若 x'，$x''<-X_1$，则有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

若 x'，$x''>X_2$，则同样有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 故总有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 从而 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$一致连续.

注 此例是例 2-24 对无穷区间的情形，但逆不成立. 例如，$f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续，但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都不存在.

【例 2-17】 若 $f(x)$ 在区间 X（有穷或无穷）具有有界的导数，即 $|f'(x)|\leqslant M$，$\forall x\in X$，则 $f(x)$ 在 X 一致连续.

【证明】 $\forall x_1,x_2\in X$，对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 或 $[x_2,x_1]$ 应用拉格朗日中值定理得，$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，$\xi$ 介于 x_1 与 x_2 之间. 因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，$\forall x_1,x_2\in X$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)(x_2-x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 X 一致连续.

【例 2-18】 求证 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

【证明】 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$，$f''(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot2\sqrt{x}-(2+\ln x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{4x}$ $=\dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$. 于是，当 $x>1$ 时，$f''(x)<0$，即 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 严格单调下降，而 $f'(1)=1$，于是 $\forall x\in[2,+\infty)$，$|f'(x)|=f'(x)\leqslant f'(2)<f'(1)=1$. 从而由例 2-17 知，$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 一致连续. 另外，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$，由例 2-24 知，$f(x)$ 在 $(0,2]$ 一致连续. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

【例 2-19】 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，求证 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 不一致连续.

【证明】 取 $\varepsilon_0=1$，$\forall\delta>0$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则 $\exists X>\max\{a,0\}$，当 $x>X$ 时，有 $f'(x)>\dfrac{2}{\delta}$. 现取 $x'=X+\delta$，$x''=X+\dfrac{\delta}{2}$，则 $|x'-x''|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$. 由拉格朗日中值定理得，$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)(x'-x'')|>\dfrac{2}{\delta}\cdot\dfrac{\delta}{2}=1=\varepsilon_0$，其中 $x''<\xi<x'$. 故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 不一致连续.

【例 2-20】 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 中必有 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

【证明】 设 $f(x_k)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$，$f(x_l)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$. 若 $f(x_k)=f(x_l)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$，所以 $\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]=f(x_1)$，于是令 $\xi=x_1$ 即可. 若 $f(x_k)\neq f(x_l)$，则 $f(x_k)>f(x_l)$，不妨设 $x_k<x_l$. 因为

$$f(x_l)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\leqslant f(x_k),$$

及 $f(x)$在$[x_k,x_l]$连续，由介值定理知，$\exists\xi\in[x_k,x_l]\subset[x_1,x_n]$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

【例 2-21】 若 $f(x)$在$[a,b]$连续，且不存在 $x\in[a,b]$，使 $f(x)=0$，则 $f(x)$在$[a,b]$恒正或恒负.

【证明】 用反证法. 假设$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 不妨设 $x_1<x_2$，由 $f(x)$在$[x_1,x_2]$的连续性，根据零点存在定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$，使 $f(\xi)=0$. 矛盾. 故 $f(x)$在$[a,b]$恒正或恒负.

【例 2-22】 若 $f(x)$在$[a,b]$为单调上升函数，值域为$[f(a),f(b)]$，证明 $f(x)$在$[a,b]$连续.

【证明】 用反证法. 假设 $f(x)$在某点 $c\in[a,b]$不连续，不妨设 $c\in(a,b)$，根据单调有界函数必有极限，$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$均存在. 从而有 $f(c-0)\neq f(c)$，或 $f(c+0)\neq f(c)$. 下设 $f(c-0)\neq f(c)$，因 $f(x)$在$[a,b]$单调上升，则应有 $f(c-0)<f(c)$，于是$\forall x\in[a,b]$且 $x<c$ 时，$f(x)\leqslant f(c-0)$；当 $x\geqslant c$ 时，$f(x)\geqslant f(c)$. 从而对于 $f(c-0)$与 $f(c)$之间的任一值，在$[a,b]$中找不到点与之对应，矛盾.

【例 2-23】 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$连续且有界，对任意 $a\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)=a$在$[0,+\infty)$只有有限个根或无根，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.

【证明】 方法一 用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在. 由于 $f(x)$在$[0,+\infty)$有界，根据例 2-4 的结论，$\exists\{x_n^{(1)}\}$，$\{x_n^{(2)}\}\subset[0,+\infty)$满足 $x_n^{(1)}\to+\infty$，$x_n^{(2)}\to+\infty(n\to\infty)$，及 $f(x_n^{(1)})\to M_1$，$f(x_n^{(2)})\to M_2(n\to\infty)$，且 $M_1\neq M_2$. 不妨设 $M_1<M_2$. 由极限的性质，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $f(x_n^{(1)})<\frac{M_1+M_2}{2}<f(x_n^{(2)})$. 又 $f(x)$在$[0,+\infty)$连续，由介值定理，$\forall n>N$，在 $x_n^{(1)}$与 $x_n^{(2)}$之间都存在一个 ξ_n，使 $f(\xi_n)=\frac{M_1+M_2}{2}$. 从而对于方程 $f(x)=$

$\frac{M_1+M_2}{2}$，它在$[0,+\infty)$就有无限多个根了．矛盾．

方法二　因$f(x)$在$[0,+\infty)$有界，故存在m，M使$m<f(x)<M$，$\forall x\in[0,+\infty)$．记$[m_1,M_1]=[m,M]$．将$[m_1,M_1]$二等分，则$\exists X_1>0$，当$x>X_1$时，$f(x)$必完全位于$\left[m_1,\frac{m_1+M_1}{2}\right]$和$\left[\frac{m_1+M_1}{2},M_1\right]$之一内．否则，因$f(x)$在$[0,+\infty)$连续，由介值定理可得，$f(x)=\frac{m_1+M_1}{2}$在$[0,+\infty)$有无限多个实根，矛盾．记此区间为$[m_2,M_2]$．将$[m_2,M_2]$二等分，同理可得，$\exists X_2>0$，当$x>X_2$时，$f(x)$必完全位于$\left[m_2,\frac{m_2+M_2}{2}\right]$和$\left[\frac{m_2+M_2}{2},M_2\right]$之一内．记此区间为$[m_3,M_3]$，…，继续下去，得到区间套$\{[m_n,M_n]\}$，对其中每一个区间$[m_n,M_n]$，$\exists X_n>0$，当$x>X_n$时，$f(x)$必完全位于$[m_n,M_n]$内．由区间套定理，$\exists\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[m_n,M_n]$，且$\lim_{n\to\infty}m_n=\lim_{n\to\infty}M_n=\xi$．$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，使得$|M_N-m_N|<\epsilon$．从而当$x>X_N$时，$|f(x)-\xi|\leqslant|M_N-m_N|<\epsilon$，即$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在．

§3　综合例题

【例2-24】（东北大学　1999年）设$f(x)$在(a,b)连续，求证$f(x)$在(a,b)一致连续的充要条件是$\lim_{x\to a^+}f(x)$与$\lim_{x\to b^-}f(x)$都存在．

【证明】　必要性．设$f(x)$在(a,b)一致连续，则$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$．若$x_1,x_2\in(a,b)$且$0<x_1-a<\frac{\delta}{2}$，$0<x_2-a<\frac{\delta}{2}$，则$|x_1-x_2|\leqslant|x_1-a|+|x_2-a|<\delta$，于是，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$．由函数极限的柯西收敛原理知，$\lim_{x\to a^+}f(x)$存在．同理可证$\lim_{x\to b^-}f(x)$存在．

充分性．定义函数

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$在$[a,b]$连续，由康托定理知，$F(x)$在$[a,b]$一致连续，从而 $F(x)$在(a,b)一致连续. 又当 $x\in(a,b)$时，$F(x)=f(x)$，故 $f(x)$在(a,b)一致连续.

【例 2-25】 利用紧致性定理证明单调有界原理.

【证明】 提示：由紧致性定理推出，$\{x_n\}$必有一收敛子列，设其极限为 a，然后证明$\{x_n\}$必收敛于 a.（也可用柯西收敛原理证）

【例 2-26】 利用单调有界原理证明紧致性定理.

【证明】 先证明任何数列必有一单调子列. 考虑集合 $T_m=\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$，$m=1, 2, \cdots$，有且仅有以下两种情形.

(1) 每个 T_m 有最大值，取 $x_{n_1}=\max T_1$，$x_{n_2}=\max T_2$，$\cdots$，$x_{n_k}=\max T_k$，$\cdots$. 显然$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的单调下降子列.

(2) 存在某个集合 $T_k=\{x_k, x_{k+1}, \cdots\}$，$T_k$ 无最大值. 从而当 $m>k$ 时，T_m 也无最大值. 取 $x_{n_1}=x_k$，则 x_{k+1}，x_{k+2}，$\cdots$中必有某个大于 x_k，记为 x_{n_2}，于是 x_{n_2+1}，x_{n_2+2}，$\cdots$中必有某个大于 x_{n_2}，记为 x_{n_3}，$\cdots$，如此继续下去，得到子列$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的单调上升子列.

再证明紧致性定理. 设$\{x_n\}$为有界数列. 由上知必存在一单调子列$\{x_{n_k}\}$，它也是有界的. 故由单调有界原理知，$\{x_{n_k}\}$收敛.

【例 2-27】（电子科技大学 2002 年） 叙述(1)有限覆盖定理和(2)魏尔斯特拉斯定理(致密性定理)，并用(1)证明(2).

【证明】 (1)有限覆盖定理 若开区间所成的区间集 E 覆盖闭区间$[a, b]$，则总可以从 E 中选出有限个区间覆盖$[a,b]$.

(2) 魏尔斯特拉斯定理 任一有界数列必有收敛的子列.

设$\{x_n\}$有界，即$\exists a, b$，使 $x_n\in[a,b]$，$\forall n\in\mathbf{N}^+$. 若$\{x_n\}$中有一值出现无穷多次，则$\{x_n\}$有常值子列以本身为极限. 不失一般性，设 $x_n\neq x_m$ $(n\neq m)$，可以证明$[a,b]$中至少存在一点 ξ，它的任何邻域都含有$\{x_n\}$中无穷多项. 若不然，$\forall c\in[a,b]$，都有邻域$(c-\delta_c, c+\delta_c)$，除 c 本身外，不含$\{x_n\}$中的点，记 $E=\{(c-\delta_c, c+\delta_c)\mid a\leqslant c\leqslant b\}$，则 E 是$[a,b]$的一个覆盖. 由有限覆盖定理知，E 中存在有限个开区间覆盖$[a,b]$，而这有限个开区间仅含有$\{x_n\}$中有限个点，与$[a,b]$中包含$\{x_n\}$所有的点矛盾. 从而可从$\{x_n\}$中选出子列收敛于 ξ.

【例 2-28】 利用有限覆盖定理证明区间套定理.

【证明】 提示：设$\{[a_n, b_n]\mid n=1, 2, \cdots\}$为区间套. 只需证$\exists\xi\in$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$即可. 若不然, 则$\forall x\in[a_1, b_1]$, $x\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 而由于区间套的包含关系, 必存在 n_x, $\forall k\geqslant n_x$, $x\notin[a_k, b_k]$. 所以必存在($\delta_x>0$), 使$(x-\delta_x, x+\delta_x)\cap[a_k, b_k]=\varnothing$, $\forall k\geqslant n_x$. 于是得到$[a_1, b_1]$的一个覆盖
$E=\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\mid x\in[a_1, b_1], (x-\delta_x, x+\delta_x)\cap[a_k, b_k]=\varnothing, k\geqslant n_x\}$.
然后利用有限覆盖定理导出结果是矛盾的.

【例 2-29】 (北京师范大学 2003 年) 设 $\alpha=\sup\{f(x)\mid a\leqslant x\leqslant b\}$, 证明存在 $a\leqslant x_n\leqslant b$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$ 成立.

【证明】 根据上确界的定义, 有① $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant\alpha$; ② $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_\varepsilon\in[a, b]$, 使 $f(x)>\alpha-\varepsilon$.

取 $\varepsilon_1=1$, 则$\exists x_1\in[a,b]$, 使 $\alpha-1<f(x_1)\leqslant\alpha$;

取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, 则$\exists x_2\in[a,b]$, 使 $\alpha-\frac{1}{2}<f(x_2)\leqslant\alpha$;

如此继续下去, 便得到一数列$\{x_n\}\subset[a, b]$, 满足$\forall n\in\mathbf{N}^+$, $x_n\in[a, b]$, $\alpha-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\alpha$. 这时有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$.

【例 2-30】 (电子科技大学 2001 年) 用"$\varepsilon-\delta$"定义证明 $f(x)=\sin x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$连续, 但不一致连续.

【证明】 任取 $x_0\in(-\infty, +\infty)$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|\sin x^2-\sin x_0^2|=\left|2\sin\frac{x^2-x_0^2}{2}\cos\frac{x^2+x_0^2}{2}\right|\leqslant|x+x_0||x-x_0|\leqslant(2|x_0|+1)|x-x_0|<\varepsilon$. 故 $f(x)=\sin x^2$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知, $f(x)=\sin x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$连续.

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall\delta>0$, 取 $x_n^{(1)}=\sqrt{2n\pi}$, $x_n^{(2)}=\sqrt{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, 只要 n 充分大, 可有$|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\delta$, 但$|\sin(x_n^{(1)})^2-\sin(x_n^{(2)})^2|=1>\varepsilon_0$. 故 $\sin x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$不一致连续.

【例 2-31】 (电子科技大学 2002 年) 用"$\varepsilon-\delta$"定义证明 $\sin\frac{1}{x}$ 在$(c, 1)(c>0)$一致连续, 但在$(0, 1)$非一致连续.

【证明】 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=c^2\varepsilon$, $\forall x_1, x_2\in(c,1)$, 当$|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|<\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|x_2-x_1|}{x_1x_2}<\frac{|x_2-x_1|}{c^2}<\varepsilon.$$

故 $\sin\frac{1}{x}$ 在$(c,1)(c>0)$一致连续.

取 $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi+(\pi/2)}$，$x''_n=\dfrac{1}{2n\pi}$（$n$ 为正整数），则 x'_n，$x''_n\in(0,1)$，

$|x'_n-x''_n|=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{4n^2\pi^2+n\pi^2}\to0(n\to\infty)$，但 $\left|\sin\dfrac{1}{x'_n}-\sin\dfrac{1}{x''_n}\right|=1$．故 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 非一致连续．

【例 2-32】（电子科技大学 2003 年）叙述闭区间套定理和闭区间上连续函数的有界性定理，并用闭区间套定理证明有界性定理．

【解】 闭区间套定理 设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足条件

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在惟一的实数 r，使得 r 属于每一个闭区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，即 $r\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$．

有界性定理 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则它在 $[a,b]$ 有界．

用闭区间套定理证明有界性定理 用反证法．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界，将 $[a,b]$ 二等分，则 $f(x)$ 至少在其中一个区间无界，把它记为 $[a_1,b_1]$；再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，$f(x)$ 至少在其中一个区间无界，记为 $[a_2,b_2]$，$\cdots$，如此下去，得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足 (1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；(3) $f(x)$ 在任一闭区间 $[a_n,b_n]$ 无界．由区间套定理，存在惟一实数 r 属于所有闭区间 $[a_n,b_n]$．因为 $f(x)$ 在 $r\in[a,b]$ 连续，由局部有界性，$\exists\,\delta>0$，$M>0$，$\forall\,x\in(r-\delta,r+\delta)\cap[a,b]$，$|f(x)|\leqslant M$．又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=r$，对充分大的 n，$[a_n,b_n]\subset(r-\delta,r+\delta)\cap[a,b]$，从而 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$（n 充分大）有界．矛盾．

注 闭区间上连续函数的性质在微积分的理论中起着基本的作用．利用实数连续性的基本定理，可以给出每个性质的多种证明．读者可以尝试寻找尽可能多的证明，作为对自己的一种训练．作为例子，下面给出闭区间上连续函数的有界性定理的其他几种证明．

(1) 用紧致性定理证明有界性定理 用反证法．假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界，则 $\forall\,G>0$，$\exists\,x_G\in[a,b]$，使 $|f(x_G)|>G$．特别地，取 $G=1$，则 $\exists\,x_1\in[a,b]$，$|f(x_1)|>1$；取 $G=2$，则 $\exists\,x_2\in[a,b]$，使 $|f(x_2)|>2$，$\cdots$；如此继续下去，便得到一数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，$f(x_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$．因 $\{x_n\}$ 是有界数列，根据紧致性定理，$\{x_n\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$ $(k\to\infty)$．又 $f(x)$ 在 x_0 点连续，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$．与 $f(x_{n_k})\to\infty$ $(k\to\infty)$ 矛盾．

(2) 用有限覆盖定理证明有界性定理　因为 $\forall x_0\in[a, b]$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(若 $x_0=a$ 或 b, 考虑其右极限或左极限), 由函数极限的局部有界性定理知, $\exists\delta_0>0$, $M_0>0$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta_0)\cap[a, b]$, $|f(x)|\leqslant M_0$. 构造开区间族

$$E=\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\mid x\in[a, b]\},$$

则 E 为 $[a, b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理知, 可以从 E 中选出有限个开区间覆盖 $[a, b]$, 记为

$$(x_1-\delta_1, x_1+\delta_1), (x_2-\delta_2, x_2+\delta_2), \cdots, (x_k-\delta_k, x_k+\delta_k).$$

又当 $x\in(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\cap[a, b]$ 时, $|f(x)|\leqslant M_i$, $i=1, 2, \cdots, k$. 取 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{M_i\}$, 则 $\forall x\in[a, b]$, $|f(x)|\leqslant M$. 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(3) 用确界原理证明有界性定理　提示: 构造集合

$$E=\{x\mid x\in[a, b]; \forall t\in[a, x], |f(t)|<K(x)\}$$

其中 $K(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 的上界, 然后证明 $\sup E=b\in E$, 即 E 有最大值 b.

【例 2-33】　(上海交通大学　2002 年)　设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续, 且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

【证明】　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $x\geqslant X$ 时, 有 $|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 又 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续, 对上述 $\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, $\forall x_1, x_2\in[a, +\infty)$, 当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时, 有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是 $\forall x_1, x_2\in[X, +\infty)$, 当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 一致连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 连续, 根据康托定理, $f(x)$ 在 $[a, X]$ 一致连续, 由例 2-15 知, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

第三章　一元函数微分学

§1　导数与微分

一、基本要求

1. 理解导数(微商)和微分的概念，会用定义求函数的导数.

2. 掌握基本初等函数的导数公式，掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，并会运用这些法则熟练地求初等函数的导数和高阶导数.

3. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数以及反函数的导数.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点附近有定义. 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，并称极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数或微商，记为 $f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则分别称这两个极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数和右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，并称 $f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称导数或微商.

若函数在开区间 (a,b) 可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数在闭区间 $[a,b]$ 可导.

2. $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 都存在，且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点必连续，反之不然.

3. 导数的四则运算法则　若函数 u 和 v 在点 x 可导，则有

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x);$$
$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

4. **复合函数求导法则** 若 $u=g(x)$在点 x 可导，$y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $f(g(x))$在 x 点处可导，且有

$$[f(g(x))]'=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)，或\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

这个公式也称为链式法则，它可以推广到多个函数复合的情形.

5. 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义. 若

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

其中 A 与 Δx 无关，则称函数 $y=f(x)$在 x_0 点可微，并称 $A\cdot\Delta x$ 为函数$f(x)$在 x_0 点的微分，记为 dy 或 df.

6. 函数 $y=f(x)$在 x 点可微$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$在 x 点可导. 这时有 $dy=f'(x)\cdot dx$. 这也是一元函数与多元函数的本质区别之一.

由上述关系式及求导法则可得相应的微分法则. 特别对应于复合函数的求导法则有 $df[g(x)]=f'(g(x))g'(x)dx$. 在此式中如以 $u=g(x)$，$du=g'(x)dx$ 代入，即得 $df(u)=f'(u)du$. 由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，此式在形式上总是成立. 这个性质称为一阶微分形式不变性. 它使我们可在微分式中作任意变量代入，有时比微商运算更重要. 高阶微分则不具有这个性质.

三、常用解题方法与典型例题

【例 3-1】 求下列函数的导数：

(1) $y=x\tan x-7x+6$；　(2) $y=\dfrac{x}{(1-x)(2-x)}$.

【解】 (1) $y'=\tan x+x\sec^2 x-7$.

$$(2)\ y'=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2}{(2-x)^2}.$$

【例 3-2】 求下列复合函数的导数：

(1) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$；　(2) $y=\ln\sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}}$.

【解】 (1) $y'=\cot\dfrac{x}{2}\cdot\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)'=\cot\dfrac{x}{2}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$$=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

(2) $y=\frac{1}{2}[\ln|x+2|+\ln|x+3|-\ln|x+1|]$,

于是
$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right).$$

[例 3-3] 设 $f(x)$是对 x 可求导的函数，$y=f(e^x)e^{f(x)}$，求$\frac{dy}{dx}$.

[解]
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=e^{f(x)}\frac{d}{dx}(f(e^x))+f(e^x)\frac{d}{dx}(e^{f(x)})\\&=e^{f(x)}f'(e^x)\frac{d}{dx}(e^x)+f(e^x)e^{f(x)}\frac{d}{dx}(f(x))\\&=e^{f(x)}f'(e^x)e^x+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)\\&=f'(e^x)e^{x+f(x)}+f(e^x)f'(x)e^{f(x)}.\end{aligned}$$

[例 3-4] 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\ (a>0)$;

(2) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$.

[解] (1)
$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}.$$

(2) $y'=a^ax^{a^a-1}+a^{x^a}ax^{a-1}\ln a+a^{a^x}a^x(\ln a)^2$.

[例 3-5] 已知函数 $y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$，求 $dy(0)$，$dy(a)$.

[解] $dy=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{1}{a^2+x^2}dx$，于是
$$dy(0)=\frac{1}{a^2+0^2}dx=\frac{1}{a^2}dx,\ dy(a)=\frac{1}{a^2+a^2}dx=\frac{1}{2a^2}dx.$$

[例 3-6] 求下列函数的微分：

(1) $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$;　(2) $y=e^{\sin x^2}$.

[解] (1) $dy=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx=\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}dx$.

(2) $dy=e^{\sin x^2}d(\sin x^2)=\cos x^2e^{\sin x^2}d(x^2)=2x\cos x^2e^{\sin x^2}dx$.

【例 3-7】 设 u，v 是 x 的可微函数，求 dy：

(1) $y=\arctan\frac{u}{v}$； (2) $y=\ln\sin(u+v)$.

【解】 (1) $dy=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}=\frac{vu'-uv'}{u^2+v^2}dx$.

(2) $dy=\frac{1}{\sin(u+v)}d\sin(u+v)=\cot(u+v)d(u+v)$
$=\cot(u+v)(u'+v')dx$.

【例 3-8】 求下列函数的微分 dy：

(1) $y=\sin^2t$，$t=\ln(3x+1)$；

(2) $y=e^{3u}$，$u=\frac{1}{2}\ln t$，$t=x^3-2x+5$.

【解】 (1) $dy=2\sin t\cos t\,dt=\sin2t\,d\ln(3x+1)=\frac{3\sin2t}{3x+1}dx$
$=\frac{3\sin[2\ln(3x+1)]}{3x+1}dx$.

(2) $dy=3e^{3u}du=3e^{3u}d\left(\frac{1}{2}\ln t\right)=\frac{3e^{3u}}{2t}dt=\frac{3e^{3u}}{2t}d(x^3-2x+5)$
$=\frac{3e^{3u}(3x^2-2)}{2t}dx=\frac{3(3x^2-2)e^{\frac{3}{2}\ln(x^3-2x+5)}}{2(x^3-2x+5)}dx$.

注 当函数为一般的初等函数时，可利用基本公式、四则运算的求导法则和微分法则、复合函数求导法则、微分形式不变性求出其导数或微分.

【例 3-9】 求下列函数的高阶导数：

(1) $y=x\ln x$，求 y''； (2) $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(n)}$.

【解】 (1) $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，于是 $y''=(y')'=\frac{1}{x}$.

(2) 由牛顿-莱布尼茨公式，有

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)}\\
&=C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{2x})^{(n-0)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}\\
&=x^2(e^{2x})^{(n)}+n\cdot2x(e^{2x})^{(n-1)}+\frac{2n(n-1)}{2}(e^{2x})^{(n-2)}\\
&=2^{n-2}e^{2x}[4x^2+4nx+n(n-1)].
\end{aligned}
$$

【例 3-10】 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\frac{1}{x(1-2x)}$； (2) $y=\sin^2x$； (3) $y=\frac{e^x}{x}$.

【解】 (1) $y=\frac{1}{x}-\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$，故

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

(2) $y=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$，故 $y^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}=e^x\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^kk!}{x^{k+1}}$.

【例 3-11】 设 $f(x)$的各阶导数存在，求 y''和 y'''.

(1) $y=f(x^2)$；　(2) $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$；　(3) $y=f(e^{-x})$；

(4) $y=f(\ln x)$；　(5) $y=f(f(x))$.

【解】 (1) $y'=2xf'(x^2)$，$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$，

$y'''=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$.

(2) $y'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，$y''=\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)$，

$y'''=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3) $y'=-e^{-x}f'(e^{-x})$，$y''=e^{-x}f'(e^{-x})+e^{-2x}f''(e^{-x})$，

$y'''=-e^{-x}f'(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-3x}f'''(e^{-x})$.

(4) $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$，$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)$，

$y'''=\frac{2}{x^3}f'(\ln x)-\frac{3}{x^3}f''(\ln^x)+\frac{1}{x^3}f'''(\ln x)$.

(5) $y'=f'(x)f'(f(x))$，$y''=f''(x)f'(f(x))+(f'(x))^2f''(f(x))$，

$y'''=f'''(x)f'(f(x))+3f'(x)f''(x)f''(f(x))+$

$(f'(x))^3f'''(f(x))$.

【例 3-12】 求函数 $y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=x^2$ 的二阶微分.

【解】 $dy=f'(u)du=e^udu=2xe^{x^2}dx$，

$d^2y=2(e^{x^2}+2x^2e^{x^2})dx^2+2xe^{x^2}d^2x$.

【例 3-13】 设函数 $u(x)=\ln x$，$v(x)=e^x$，求 $d^3(uv)$，$d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

【解】 $du=\frac{1}{x}dx$，$d^2u=-\frac{1}{x^2}dx^2+\frac{1}{x}d^2x$，

$d^3u=\frac{2}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}d^2x\,dx+\frac{1}{x}d^3x$，

$dv=e^x dx$, $d^2v=e^x dx^2+e^x d^2x$,

$d^3v=e^x dx^3+3e^x d^2x dx+e^x d^3x$,

$d(uv)=u dv+v du$, $d^2(uv)=2du dv+u d^2v+v d^2u$,

$d^3(uv)=3d^2u dv+3du d^2v+u d^3v+v d^3u$，故

$$d^3(uv)=\frac{e^x}{x^3}[x^2(1+x\ln x)d^3x+3x(-1+2x+x^2\ln x)dx d^2x+(2-3x+3x^2+x^3\ln x)dx^3];$$

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{e^x}{x^3}[x^2(1-x\ln x)d^3x+3x(-1-2x+x^2\ln x)dx d^2x+(2+3x+3x^2-x^3\ln x)dx^3].$$

【例 3-14】 若 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，证明 $f^{(n)}(0)=0$.

【证明】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{\text{令 } y=\frac{1}{x}}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{e^{y^2}}=0$. 设 $f^{(n-1)}(0)=0$,因为 $f^{(n-1)}(x)=P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}(x\neq 0)$，其中 $P\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 表示关于 $\dfrac{1}{x}$ 的某个多项式. 因此 $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{yP(y)}{e^{y^2}}=0$. 由归纳法得，$f^{(n)}(0)=0$.

【例 3-15】 求函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$ 的导数.

【解】 当 $|x|<1$ 时，$f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$，当 $|x|>1$ 时，$f'(x)=0$.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-1}-e^{-1}}{x-1}=0,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{xe^{-x^2}-e^{-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}e^{-x^2}(1-2x^2)=-e^{-1},$$

所以 $f'(1)$不存在. 因 $f(x)$在 $x=-1$ 不连续，所以 $f'(-1)$也不存在. 于是

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-x^2}(1-2x^2), & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}.$$

注 本题典型错误是没有考虑分界点的导数，而直接得

$$f'(x)=\begin{cases}e^{-x^2}(1-2x^2), & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}.$$

【例 3-16】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ ax+b, & x<3\end{cases}$，确定 a，b 的值，使 $f(x)$在 $x=3$ 处可导.

分析 要使 $f(x)$在 $x=3$ 处可导，只需 $f(3)=f(3+0)=f(3-0)$和 $f'_-(3)=f'_+(3)$即可.

【解】 由 $f(3-0)=f(3)\Rightarrow 3a+b=9$，又

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6,$$

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax+b-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax-3a}{x-3}=a.$$

所以 $a=6$，$b=-9$.

【例 3-17】 设 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(m\in\mathrm{N}^+)$. 试问：

(1) m 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处连续；

(2) m 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处可导；

(3) m 为何值时，$f'(x)$在 $x=0$ 处连续.

【解】 (1) 要使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，只需 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}x^m\sin\dfrac{1}{x}=0$；当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 有界但无极限，因此，只需 $x^m\to 0$，于是 $m>0$.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$；所以，要使 $f'(0)$存在，当且仅当 $x^{m-1}\to 0(x\to 0)$，于是 $m>1$，这时 $f'(0)=0$.

(3) 因为 $f'(x)=\begin{cases}x^{m-2}\left(mx\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，只需 $x^{m-2}\to 0$，即 $m>2$.

【例 3-18】 设 $g(0)=g'(0)=0$，$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$.

【解】 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\dfrac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\cdot\sin\frac{1}{x}\right]=0$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0,\ \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right).$$

注　一般分段函数在各段上是可导的，可用求导法则直接求出，分界点的导数必须用定义判定或求出，特别当函数在分界点左、右两侧表达式不同时，应利用定义判定在该点的左、右导数是否存在及相等.

【例 3-19】　求下列隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$：

(1) $x^3+y^3-xy=0$；　　(2) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

【解】　(1) 方程两边关于 x 求导，有 $3x^2+3y^2\cdot y'-(y+x\cdot y')=0$，解得，$y'=\frac{y-3x^2}{3y^2-x}$.

(2) 方程两边关于 x 求导，有 $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}$，解得 $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

【例 3-20】　求下列参数方程的导数：

(1) $\begin{cases}x=e^{2t}\cos^2 t\\ y=e^{2t}\sin^2 t\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right)\\ y=a\sin t\end{cases}$.

【解】　(1) $x'(t)=2e^{2t}\cos^2 t-e^{2t}2\cos t\sin t=2e^{2t}\cos t(\cos t-\sin t)$,

$$y'(t)=2e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}2\sin t\cos t=2e^{2t}\sin t(\sin t+\cos t),$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\tan t\ \frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}.$$

(2) $x'(t)=a\left(\cot\frac{t}{2}\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}-\sin t\right)=a(\csc t-\sin t)=a\cos t\cot t$, $y'(t)=a\cos t$，所以，$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\tan t$.

【例 3-21】　求由 $e^{x+y}-xy=0$ 所确定的隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】　方程两端对 x 求导，得 $e^{x+y}(1+y')-y-xy'=0$，解出

$$y'=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}.$$

将 $e^{x+y}(1+y')-y-xy'=0$ 式两端再对 x 求导，得

$$e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}y''-y'-y'-xy''=0,$$

整理得 $y''=\dfrac{2y'-e^{x+y}(1+y')^2}{e^{x+y}-x}$，把 y' 代入，得

$$y''=\frac{2(e^{x+y}-x)(y-e^{x+y})-e^{x+y}(y-x)^2}{(e^{x+y}-x)^3}.$$

注　求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数的导数常用三种方法：(1) 把 y 看成 x 的函数，在方程两边对 x 求导，用复合函数求导法则，得到含 y' 的等式，从中解出 y'. (2) 方程两边求微分，利用一阶微分形式不变性，得到含 dx 和 dy 的等式，再解出 $\dfrac{dy}{dx}$. (3) 利用公式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$（在第五章给出）.

【例 3-22】　求下列参数方程的二阶导数：

(1) $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$.

【解】　(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(1+t)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)\frac{1}{x'(t)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)}.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{f''(t)}.$$

【例 3-23】　用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；　　(2) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

【解】　(1) 两边取对数，得 $\ln y=\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln|1-x|-\ln|1+x|)$. 两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

故
$$y'=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{(1-x)(1+x)}\right].$$

(2) 两边取对数，得 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$. 两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}.$$

故
$$y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}\right).$$

注　常用取对数求导法求幂指函数及连乘积函数的导数. 对 $y=f(x)$ 两

边取对数后，两边对 x 求导，把 y 看成复合函数的中间变量. 其优点是，可以把积商化为和差，幂指函数化为乘积函数，从而简化运算.

【例 3-24】 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$. 求 $f(^{-1})''(y)$.

【解】 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=\dfrac{-y''}{(y')^3}$.

注 此题给出了反函数的二阶导数公式. 反函数的导数等于原来函数的导数的倒数，但反函数的二阶导数不一定等于原来函数的二阶导数的倒数.

【例 3-25】 设 $y=y(x)$ 存在反函数，且满足方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$. 证明反函数 $x=x(y)$ 满足 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=1$，并由此求出一个 $y=y(x)$.

【证明】 由例 3-24 知，

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{-y''}{(y')^3}=-\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}=1.$$

由 $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=1$ 知，可取 $\dfrac{dx}{dy}=y$，从而 $x=\dfrac{1}{2}y^2$，即 $y^2=2x$ 满足方程.

§2 微分中值定理及其应用

一、基本要求

1. 掌握费马定理，罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理和泰勒公式，会用它们证明有关命题，掌握通过构造辅助函数解决问题的方法.

2. 掌握用洛必达法则求待定型极限的方法.

3. 会用导数(包括高阶导数)判断函数的单调性、极值、凸性.

4. 掌握函数最大值、最小值的求法及其应用.

二、主要概念和结论

1. 若存在 $\delta>0$，使函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内满足 $f(x_0)\geqslant f(x)$ (或 $f(x_0)\leqslant f(x)$)，则称函数 f 在点 x_0 取得极大(小)值，x_0 称为 f 的极大(小)值点. 极大值和极小值统称为极值.

2. 费马定理　若函数 $f(x)$ 在 x_0 点达到极值，且 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f'(x_0)=0$.

注　定理给出了 $f(x)$ 取得极值的必要条件. 我们称满足 $f'(x)=0$ 的点 x 为 $f(x)$ 的稳定点或驻点.

3. 罗尔定理　若函数 $f(x)$ 满足　(ⅰ) 在闭区间 $[a, b]$ 连续；(ⅱ) 在开区间 (a, b) 可导；(ⅲ) $f(a)=f(b)$，则 $\exists\, \xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

4. 拉格朗日中值定理　若函数 $f(x)$ 满足　(ⅰ) 在闭区间 $[a, b]$ 连续；(ⅱ) 在开区间 (a, b) 可导，则 $\exists\, \xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5. 柯西中值定理　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足　(ⅰ) 在闭区间 $[a, b]$ 连续；(ⅱ) 在开区间 (a, b) 可导；(ⅲ) $g'(x)\neq 0$，则 $\exists\, \xi\in(a, b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

6. 洛必达法则　若(ⅰ) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$，其中 $\delta>0$；(ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (或 ∞)；(ⅲ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (其中 A 可为实数，也可以为 ∞). 则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

注　上述表达式中分子分母同时趋于零(或无穷)，称这种表达式极限为 $\dfrac{0}{0}\left(\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型待定型. 除此之外，还有 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^∞，0^0，∞^0 类型待定型，这些待定型都可以经过适当变形或变换化为 $\dfrac{0}{0}\left(\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型的待定型，然后用洛必达法则来求其极限. 法则对极限过程 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的情形，只要稍加修改条件(ⅰ)，有同样的结论.

7. 泰勒公式　若函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个区间有 $n+1$ 阶连续导数，则对该区间内的任何 x，有下面的泰勒公式成立：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的 n 次泰勒多项式，$R_n(x)$ 称为 n 次泰勒公式的余

项. 当 $x_0=0$ 时上述公式称为麦克劳林公式. 其中余项 $R_n(x)$ 有以下几种形式:

皮亚诺型余项　$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$;

拉格朗日型余项　$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x 与 x_0 之间;

柯西型余项　$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$;

积分余项　$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

常见的基本初等函数的麦克劳林展开式:

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+$

$(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}+$

$(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}$;

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+$

$\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$;

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$

$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$　$(0<\theta<1)$.

8. 函数的单调性　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调上升(或单调下降)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$), $\forall x\in(a, b)$.

注　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内严格单调上升(或严格单调下降). 但反之不一定, 如 $f(x)=x^3$ 在任何包含 0 的区间严格单调上升, 但 $f'(0)=0$.

9. 函数的极值　极值的第一充分条件　设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 连续, 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 可导, 其中 $\delta>0$.

(1) 若当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时 $f'(x_0)\leqslant 0$, 当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时, $f'(x_0)\geqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极小值;

(2) 若当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$时，$f'(x_0)\geqslant 0$，当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x_0)\leqslant 0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 取得极大值.

极值的第二充分条件　设函数 $f(x)$在点 x_0 二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$在 $x=x_0$ 取得极小值；

(2) 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$在 $x=x_0$ 取得极大值.

若函数 $f(x)$在$[a, b]$连续，则 $f(x)$在$[a, b]$必能取到最值，且最值只能在区间$[a, b]$的端点、驻点或不可导点取得，逐一比较，便可获得最大值和最小值.

10. 函数的凸性　设函数 $y=f(x)$在区间 I 有定义，$\forall\lambda\in[0, 1]$，$\forall x_1, x_2\in I$，若 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 为下凸函数；若 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 为上凸函数.

设 $f(x)$在(a, b)二阶可导，若 $\forall x\in[a, b]$，都有 $f''(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，则 $f(x)$在(a, b)为下(上)凸函数.

11. 拐点　若函数 $f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$的两侧附近分别是上凸和下凸的，则称$(x_0, f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点.

设函数 $f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$可导，在$(x_0-\delta, x_0)$和$(x_0, x_0+\delta)$二阶可导. 若 $f''(x)$在$(x_0-\delta, x_0)$和$(x_0, x_0+\delta)$的符号相反，则$(x_0, f(x_0))$是曲线的拐点.

三、常用解题方法与典型例题

【例 3-26】　设函数 $f(x)$在 a 点具有连续的二阶导数. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

【证明】　方法一　因为 $f(x)$在 a 点有连续二阶导数，故 $\exists\delta>0$，使得 $f(x)$在$(a-\delta, a+\delta)$有连续的一阶导数. 任取 $h\in(0, \delta)$，令 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)$，$G(x)=x^2$，$x\in[0, h]$，则 F 和 G 在$[0, h]$满足柯西中值定理条件，故 $\exists\xi\in(0, h)$，使得

$$\frac{F(b)-F(0)}{G(b)-G(0)}=\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$=\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}.$$

又当 $h\to 0$ 时，$\xi\to 0$，且 $f(x)$在 a 点二阶可导，所以，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{\xi}+\frac{f'(a-\xi)-f'(a)}{-\xi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(a)+f''(a)]=f''(a).$$

注　若只给出条件函数 $f(x)$ 在 a 点具有二阶导数，仍有同样结论成立.

方法二　由洛必达法则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a).$$

方法三　因 $f(x)$ 在 a 点有连续二阶导数，所以 $\exists\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to a}f''(x)=f''(a)$. 任取 $h\in(0,\ \delta)$，对 $f(x)$ 分别在 $[a-h,\ a]$ 和 $[a,\ a+h]$ 应用拉格朗日中值定理得，$\exists\xi_1\in(a-h,\ a)$，$\xi_2\in(a,\ a+h)$，使得 $f(a)-f(a-h)=hf'(\xi_1)$，$f(a+h)-f(a)=hf'(\xi_2)$. 所以 $f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=h[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 应用拉格朗日中值定理得，$\exists\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)$，使得

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=h^2f''(\xi),$$

令 $h\to 0$，则 ξ_1，ξ_2 都趋于 a，从而 $\xi\to a$，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{\xi\to a}f''(\xi)=f''(a).$$

【例 3-27】　设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a$，求证 $\forall\ T>0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=Ta$.

【证明】　对 $f(x)$ 在 $[x,\ x+T]$ 应用拉格朗日中值定理得，$\exists\xi\in(x,\ x+T)$，使得 $f(x+T)-f(x)=Tf'(\xi)$. 令 $x\to+\infty$，则 $\xi\to+\infty$，从而

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=T\lim_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=Ta.$$

【例 3-28】　证明(1) 方程 $x^3-3x+c=0$（c 是常数）在区间 $[0,\ 1]$ 内不可能有两个不同的实根；(2) 方程 $x^n+px+q=0$（n 为正整数，p,q 为实数）当 n 为偶数时至多有两个实根；当 n 为奇数时至多有三个实根.

【证明】　(1) 用反证法. 若方程在 $[0,\ 1]$ 有两个不同的实根 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$. 令 $f(x)=x^3-3x+c$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,\ x_2]$ 满足罗尔定理条件. 于是 $\exists\xi\in(x_1,\ x_2)$，使得 $f'(\xi)=3\xi^2-3=0\Rightarrow\xi=1$. 这与 $0\leqslant x_1<\xi<x_2\leqslant 1$ 矛盾.

(2) 当 n 为偶数时，设方程有三个不同的实根 x_1，x_2，x_3，不妨设 $x_1<x_2<x_3$．令 $f(x)=x^n+px+q$，则 $f(x)$在$[x_1, x_2]$和$[x_2, x_3]$满足罗尔定理条件，从而$\exists\xi_1\in(x_1, x_2)$，$\exists\xi_2\in(x_2, x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=n\xi_1^{n-1}+p=0$，$f'(\xi_2)=n\xi_2^{n-1}+p=0$．于是

$$f'(\xi_1)-f'(\xi_2)=n(\xi_1^{n-1}-\xi_2^{n-1})=0\Rightarrow\xi_1=\xi_2,$$

这与 $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3$ 矛盾．故当 n 为偶数时，原方程至多有两个实根．同理可证，当 n 为奇数时，原方程至多有三个实根．

【例 3-29】 设 $f(x)$在$(a, +\infty)$可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$．求证$\exists\xi\in(a, +\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$．

【证明】 若 $f(x)\equiv A$，$\forall x\in(a, +\infty)$，则任取 $\xi\in(a, +\infty)$即可．

若 $f(x)\not\equiv A$，$\exists x_0\in(a, +\infty)$，使得 $f(x_0)\neq A$．不妨设 $f(x_0)>A$(对 $f(x_0)<A$ 类似可证)．任取一数 B 满足$A<B<f(x_0)$．由于 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A<B$，则对 $\varepsilon_0=B-A>0$，$\exists\delta_0>0$，当 $a<x<a+\delta_0$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon_0=B-A$，即 $2A-B<f(x)<B<f(x_0)$．又 $f(x)$在$(a, +\infty)$连续，根据介值定理，$\exists x_1\in(a, x_0)$，使 $f(x_1)=B$；又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<B$，则$\exists X>x_0>0$，当 $x>X$ 时，有 $f(x)<B<f(x_0)$，由介值定理，$\exists x_2\in(x_0, X)$，使 $f(x_2)=B$．从而 $f(x)$在$[x_1, x_2]$满足罗尔定理条件，故$\exists\xi\in(x_1, x_2)\subset(a, +\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$．

【例 3-30】 设 $f(x)$可导，求证 $f(x)$的两零点之间有 $f(x)+f'(x)$的零点．

【证明】 设 x_1，x_2 是 $f(x)$的两个零点，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$．作辅助函数 $F(x)=f(x)e^x$，由于 $f(x)$可导，所以 $F(x)$可导，于是 $F(x)$在$[x_1, x_2]$满足罗尔定理条件，从而$\exists\xi\in(x_1, x_2)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)e^\xi+f(\xi)e^\xi=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，所以 $f(\xi)+f'(\xi)=0$．

注　构造辅助函数是本题证明的关键，请读者注意理解各种类型辅助函数的构造．

【例 3-31】 设函数 $f(x)$在$[a, b]$可导，其中 $a\geqslant0$，求证$\exists\xi\in(a, b)$，使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$．

【证明】 设 $g(x)=x^2$，则 f 和 g 在$[a, b]$可导，且当 $x\in(a, b)$时，$g'(x)\neq0$．由柯西中值定理，$\exists\xi\in(a, b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，于是

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

【例 3-32】 设 $f(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，且$0<a<b$，证明存在 $\xi\in(a, b)$，使得

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

【证明】 方法一 令 $k=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$，则$\dfrac{f(b)-k}{b}=\dfrac{f(a)-k}{a}$. 作辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)-k}{x}$（称为 k 值法），易知 $F(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，且 $F(a)=F(b)$. 由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a, b)$，使得 $F'(\xi)=0$. 又 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-[f(x)-k]}{x^2}$，$x\in(a, b)$，所以 $\xi f'(\xi)-[f(\xi)-k]=0$，即

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

方法二 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $F(x)$与 $G(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，且 $G'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$. 由柯西中值定理知，$\exists\,\xi\in(a, b)$，使得

$$\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}},$$

即
$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

方法三 令 $F(x)=xf\left(\dfrac{ab}{x}\right)$，则 $F(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导. 由拉格朗日中值定理，$\exists\,\eta\in(a, b)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

又
$$F'(x)=f\left(\frac{ab}{x}\right)-\frac{ab}{x}f'\left(\frac{ab}{x}\right),$$

令 $\xi=\dfrac{ab}{\eta}$，则 $\xi\in(a, b)$，且

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

【例 3-33】 若 $f(x)$在$[a, b]$可导，且 $f'(a)\neq f'(b)$，k 为介于 $f'(a)$与 $f'(b)$之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=k$.

【证明】 不妨设 $f'(a)<k<f'(b)$. 令 $F(x)=f(x)-kx$，则 $F(x)$在$[a, b]$连续，且 $F'(x)=f'(x)-k$. 由闭区间上连续函数的性质，$F(x)$在

$[a, b]$有最小值. 设最小值点为 ξ. 因 $F'(a)=f'(a)-k<0$, 故存在 $x_1\in[a, b]$, 使得 $\dfrac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}<0$. 从而 $F(a)>F(x_1)\geqslant F(\xi)$, 所以 $\xi\neq a$. 同理可证 $\xi\neq b$, 即 $\xi\in(a, b)$. 故 ξ 为 $F(x)$的极小值点, 由费马定理, $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=k$.

注 (1) 此结论称为达布定理. 它说明 $f'(x)$具有介值性. 由此可得, 若 $f(x)$在$[a, b]$可导, 则 $f'(x)$不能有第一类间断点, 即具有第一类间断点的函数不存在原函数.

(2) 下面结论是本例的特殊情形: 若 $f(x)$在$[a, b]$可导, 且 $f'(a)\cdot f'(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使 $f'(\xi)=0$. 它对应于根的存在定理.

【例 3-34】 用拉格朗日中值定理证明不等式$\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$, $x>0$.

【证明】 函数 $f(t)=\arctan t$ 在$[0, x]$满足拉格朗日定理条件, 故$\exists\,\xi\in(0, x)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{\arctan x-\arctan 0}{x-0},$$

即

$$\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan x}{x}.$$

由于 $0<\xi<x$, 故

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+\xi^2}<1,$$

从而有

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan x}{x}<1,$$

即

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x.$$

【例 3-35】 用函数的单调性证明不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$.

【证明】 令 $f(x)=x-\ln(1+x)$, $x\geqslant 0$, 则当 $x>0$ 时, $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}>0$, 所以当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 即 $\ln(1+x)<x$.

令 $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$, $x\geqslant 0$, 则当 $x>0$ 时, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$, 所以当 $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$, 即 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

【例 3-36】 应用函数的凹凸性证明不等式: $\forall\,a, b\in(-\infty, +\infty)$, 有 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^a+e^b)$.

【证明】 令 $f(x)=e^x$, 因为 $f''(x)>0$, 故 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$下凸, 从

而$\forall a, b\in(-\infty, +\infty)$，有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$，即$e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(e^a+e^b)$.

【例3-37】 (1) 求函数$f(x)=ax-\ln x$在$x>0$的极值；(2) 求方程$ax=\ln x$有两个实根的条件.

【解】 (1) 当$a\leqslant 0$时，$f'(x)=a-\frac{1}{x}<0$，此时$f(x)$在$x>0$时单调下降，无极值；当$a>0$时，令$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$，又$f''\left(\frac{1}{a}\right)=a^2>0$，故$f(x)$在$x=\frac{1}{a}$时取到极小值$f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$.

(2) 当$0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)=a-\frac{1}{x}<0$，当$x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故当$f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a<0$，即$0<a<e^{-1}$时，原方程有两个实根.

【例3-38】 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，证明$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$取到它的最小值.

【证明】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，故$\forall G>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$f(x)>G$.若取$G=|f(0)|+1>0$，则$\exists X_0>0$，当$|x|>X_0$时，有$f(x)>G=|f(0)|+1>f(0)$. 则若$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$有最小值，应在$[-X_0-1, X_0+1]$中取到. 由于$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续，从而$f(x)$在闭区间$[-X_0-1, X_0+1]$连续，由最值定理知，$f(x)$在$[-X_0-1, X_0+1]$可以取到最小值. 所以，$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$取到它的最小值.

【例3-39】 设$f(x)$在$[a, b)$连续，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$.

(1) 若存在$x_1\in[a, b)$，使$f(x_1)>B$，则$f(x)$在$[a, b)$达到最大值；

(2) 若存在$x_1\in[a, b)$，使$f(x_1)=B$，能否断言$f(x)$在$[a, b)$达到最大值？

【证明】 (1) 方法一 由$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，$f(x_1)>B$，故对$\varepsilon_0=f(x_1)-B>0$，$\exists\delta_0>0$，且$\delta_0<b-a$，使当$x\in(b-\delta_0, b)$时，有$f(x)-B<\varepsilon_0=f(x_1)-B\Rightarrow f(x)<f(x_1)$.因为$f(x)$在$[a, b)$连续，所以$f(x)$在$[a, b-\delta_0]$连续，由最值定理知，$f(x)$在$[a, b-\delta_0]$达到最大值. 从而$f(x)$在$[a, b)$达到最大值.

方法二 令$F(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x<b\\ B, & x=b\end{cases}$，则$F(x)$在$[a, b]$连续，于是

$F(x)$在$[a, b]$达到最大值. 又存在 $x_1\in[a, b)$, 使 $F(x_1)>F(b)$. 从而 $F(x)$在$[a, b)$达到最大值, 即 $f(x)$在$[a, b)$达到最大值.

(2) 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & a\leqslant x<b \\ B, & x=b \end{cases}$, 则 $F(x)$在$[a, b]$连续, 于是 $F(x)$在$[a, b]$达到最大值. 若最大值为 B, 则 $F(x)$在 x_1 处达到 $F(x)$在$[a, b)$的最大值, 即 $f(x)$在$[a, b)$可达到最大值; 若最大值大于 B, 则 $F(x)$在$[a, b)$内可以达到最大值, 即 $f(x)$在$[a, b)$也可达到最大值.

【例 3-40】 给定长为 l 的线段, 试把它分成两段, 使以这两段为边所围成的矩形面积为最大.

【解】 设其中一段长为 x, 则另一段长为 $l-x$, 于是矩形的面积为

$$A(x)=x(l-x).$$

令 $A'(x)=l-x-x=0\Rightarrow x=\frac{l}{2}$, 由实际问题知, 当分成的两段都为$\frac{l}{2}$时, 所围成的矩形面积最大.

【例 3-41】 设炮口的仰角为 α, 炮弹的初速为 v_0(m/s), 炮口取作原点, 发炮时取作 $t=0$, 不计空气阻力时, 炮弹的运动方程为:

$$\begin{cases} x=tv_0\cos\alpha \\ y=tv_0\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

若初速 v_0 不变, 问如何调整炮口的仰角 α, 使炮弹射程最远.

【解】 要求射程最远, 即求 x 的最大值, 且此时 $y=0$, 即

$$y=tv_0\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2=0\Rightarrow t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

于是 $x(\alpha)=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$, $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 令 $x'(\alpha)=\frac{2v_0^2\cos2\alpha}{g}=0\Rightarrow$ $\alpha=\frac{\pi}{4}$, 由实际问题知, 当仰角 α 为$\frac{\pi}{4}$时, 炮弹射程最远.

【例 3-42】 设 $f(x)$在$[a, +\infty)$有界, $f'(x)$存在, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$. 求证 $b=0$.

【证明】 方法一 不妨设 $a>0$. 任取 $x\in[a, +\infty)$, $f(x)$在$[x, 2x]$满足拉格朗日中值定理的条件, 故$\exists\,\xi\in(x, 2x)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$. 注意到 $f(2x)-f(x)$在$[a, +\infty)$有界及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$. 令 $x\to+\infty$, 这时有 $\xi\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to0$. 从而 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=0$. 由极限的惟一性知, $b=0$.

方法二 用反证法. 若 $b\neq0$, 不妨设 $b>0$ ($b<0$ 情形类似可证). 由于

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b>0$，则对 $\varepsilon_0=\dfrac{b}{2}>0$，$\exists X_0>\max\{0,\ a\}$，当 $x>X_0$ 时，有 $|f'(x)-b|<\varepsilon_0=\dfrac{b}{2}$，即 $0<\dfrac{b}{2}<f'(x)<\dfrac{3b}{2}$. 从而 $f(x)$在$(X_0,\ +\infty)$严格单调上升. 且对 $x_1=X_0+1$，$x_2>x_1$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)>\frac{b}{2}\quad(\xi\in[x_1,\ x_2]),$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>\dfrac{b}{2}(x_2-x_1)\Rightarrow f(x_2)>f(X_0+1)+\dfrac{b}{2}(x_2-X_0-1)$，令 $x_2\to+\infty$，则 $\lim\limits_{x_2\to+\infty} f(x_2)=+\infty$. 于是 $f(x)$在$[a,\ +\infty)$无界，矛盾.

注 类似可证，(1) 若 $f(x)$在$[a,\ +\infty)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$都存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. (2) 设 $f(x)$在$[a,\ +\infty)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b>0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$.

【例 3-43】 设函数 $f(x)$在$(a,\ b)$可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=A$，证明：

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在；

(2) 若补充定义 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，则 $f'_+(a)$存在且等于 A.

【证明】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=A$ 知，存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，$|f'(x)-A|<1$，由此 $|f'(x)|<|A|+1$. 任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\ \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}\right\}$，则当 $x',\ x''\in(a,\ a+\delta)$时，由拉格朗日中值定理，$|f(x'')-f(x')|=|f'(\xi)||x''-x'|<(|A|+1)\delta\leqslant\varepsilon$，其中 ξ 介于x''与x'之间. 由柯西收敛原理知，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在.

(2) 补充定义 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. 任取 $x\in(a,b)$，则 $f(x)$在$[a,x]$满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi\in(a,x)$，使得 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$.因 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=A$ 及当 $x\to a^+$ 时，$\xi\to a^+$，所以 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\xi\to a^+} f'(\xi)=A$，即 $f'_+(a)$存在且等于 A.

注 (1) 对左导数的情形有类似的结论.

(2) 由此可得导数极限定理 设函数 $f(x)$在 x_0 点附近连续，除 x_0 点外可导，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在，则 $f'(x_0)$也存在，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

(3) 由此可知，对导函数 $f'(x)$而言，x 或者是连续点，或者是第二类间

断点，不可能是第一类间断点.

【例 3-44】 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $f'(x)$ 单调，证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 连续.

【证明】 反证法. 假设 $x_0\in(a, b)$ 是 $f'(x)$ 的一个间断点，由于 $f'(x)$ 在 (a, b) 单调，x_0 必为 $f'(x)$ 的第一类间断点. 由例 3-43 注(3)得出矛盾.

【例 3-45】 求下列待定型的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$； (3) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$； (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

【解】 (1) $\left(\dfrac{0}{0}型\right)$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1.$$

(2) $(\infty-\infty型)$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $(0\cdot\infty型)$ 原式 $=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\pi-x}{\cot\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{-1}{-\csc^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to \pi}2\sin^2\dfrac{x}{2}=2$.

(4) $(1^\infty型)$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}\right\}=e^{-1}$.

(5) $\left(\dfrac{0}{0}型\right)$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-\dfrac{1+x}{1+x}}{2x(1+x)+x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}=e\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1+x}}{6x+2}=-\frac{e}{2}.$$

【例 3-46】 写出下列函数在 $x=0$ 的带皮亚诺型余项的泰勒展开式：

(1) $\sin^3x$； (2) $\dfrac{x}{2x^2+x-1}$； (3) $\ln\dfrac{1+x}{1-2x}$.

【解】 (1) $\sin^3x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})\right]-$$

$$\frac{1}{4}\left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(3-3^{2k-1})}{4(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2n-1}).$$

(2) $$\frac{x}{2x^2+x-1} = \frac{x}{(2x-1)(x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-2x}\right]$$

$$= \frac{1}{3}[1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)] - \frac{1}{3}[1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + o(x^n)] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[(-1)^k - 2^k]x^k + o(x^n).$$

(3) $$\ln\frac{1+x}{1-2x} = \ln(1+x) - \ln(1-2x)$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)\right] - \left[(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x)^n + o(x^n)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k-1} + 2^k]x^k + o(x^n).$$

【例 3-47】 求下列函数在 $x = 1$ 的泰勒展开式：

(1) $\ln x$；　(2) a^x.

【解】 (1) $$\ln x = \ln[1 + (x-1)]$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + o[(x-1)^n].$$

(2) $$a^x = a\cdot a^{x-1} = a\cdot e^{(x-1)\ln a}$$

$$= a + a\ln a\cdot(x-1) + \frac{a\ln^2 a}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{a\ln^n a}{n!}(x-1)^n + o[(x-1)^n].$$

【例 3-48】 利用泰勒公式求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x})$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^2}=0$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^3+\frac{1}{2!}(x^3)^2+o(x^6)-1-x^3}{(2x)^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^6+o(x^6)}{(2x)^6}$

$=\frac{1}{128}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o(x)\right]=1$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{y\to 0^+}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}+\frac{3}{y}}-\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}}\right]$

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\left[(1+3y^2)^{\frac{1}{3}}-(1-2y)^{\frac{1}{2}}\right]$

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\left\{\left[1+\frac{1}{3}(3y^2)\right]-\right.$

$\left.\left[1+\frac{1}{2}(-2y)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2y)^2\right]+o(y^2)\right\}$

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y+y^2+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}{y}=1$.

或 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left\{\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$.

【例 3-49】 设 $f(x)$ 在原点附近二次可微，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0$.

(1) 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$； (2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]$.

【解】 (1) 由于 $\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{x^3}\left[3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\right]+\frac{1}{x^2}\cdot$

$\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\right]=\frac{3}{x^2}+\frac{f(0)}{x^2}-\frac{9}{2}+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'(0)}{x}+o(1)$，由$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0$知，$f(0)=-3$，$f'(0)=0$，$f''(0)=9$.

(2) 由 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$及(1)的结果得，

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

【例 3-50】 设 $f(x)$在实轴上任意次可导，令 $F(x)=f(x^2)$，求证：

$$F^{(2n+1)}(0)=0,\quad \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

【证明】 $f(x)$在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$. 从而

$f(x^2)=f(0)+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n}+\cdots$,

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+$

$\frac{F^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$.

由 $F(x)=f(x^2)$，$F(0)=f(0)$，比较上面两式得，$F^{(2n+1)}(0)=0$，$\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

【例 3-51】 设 $f(x)$在$[a,b]$有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $c\in(a,b)$，使$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

【证明】 由于 $f(x)$在$[a,b]$有二阶导数，则 $f(x)$在 $x=a$ 和 $x=b$ 两点的泰勒展开式分别为

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$,

其中 $\xi\in(a,x)$；

$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2$,

其中 $\eta\in(x,b)$.

所以$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2-\frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2\right|$. 令 $x=\frac{a+b}{2}$，则

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi)-f''(\eta)|$$

$$\leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|)$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\cdot 2\max\{|f''(\xi)|,|f''(\eta)|\}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}|f''(c)|.$$

其中 $c=\xi$ 或 η，使得 $|f''(c)|=\max\{|f''(\xi)|,|f''(\eta)|\}$. 所以

$$|f''(c)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

注　类似可证，设 $f(x)$在$[a,b]$有二阶导数，$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，证明存在 $c\in(a,b)$，使 $|f''(c)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$. 可以进一步说明不等式右端的常数 4 是最佳估计(即如果将此常数改为大于 4 的数，则有函数使不等式不再成立).

【例 3-52】　对函数 $f(x)$在$[0,x]$应用拉格朗日中值定理有

$$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x,\ \theta\in(0,1).$$

试证对下列函数有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$：

(1) $f(x)=\ln(1+x)$；　　(2) $f(x)=e^x$.

【证明】　(1) 由 $\ln(1+x)-0=\frac{1}{1+\theta x}\cdot x$，可得 $\theta=\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$. 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\theta=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 由 $e^x-1=e^{\theta x}\cdot x$，可得 $\theta=\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}$. 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\theta=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x(1+x)}{e^x(1+1+x)}=\frac{1}{2}.$$

【例 3-53】　设 $f(x)$在 a 点附近二阶可导，且 $f''(a)\neq 0$，由微分中值定理 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$，$0<\theta<1$. 求证$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

【证明】　由泰勒公式 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)$，与题设式子相减得

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{f''(a)}{2}h+o(h).$$

故

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\frac{f''(a)}{2}.$$

由于 $f''(a)\neq 0$，故 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

注 (1) 例 3-52 为本例结果对具体函数的具体应用.

(2) 进一步有结论：设 $f(x)$ 在 a 点附近 n 阶可导，且 $f^{(n-1)}(a)\neq 0$，由泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)h^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)h^n}{n!},$$

$$0<\theta<1.$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

【例 3-54】 证明若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 恒有 $f''(x)\geqslant 0$，则在 $[a,b]$ 内任意两点 x_1，x_2，都有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

【证明】 任取 x_1，$x_2\in[a,b]$. 将 $f(x)$ 在点 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 处展为泰勒公式，并分别取 $x=x_1$，x_2 有

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2,$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2!}\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

其中 ξ 在 x_1 与 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 之间，η 在 x_2 与 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 之间，于是

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_2-x_1)^2}{8}[f''(\xi)+f''(\eta)]\geqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

注 本例利用泰勒公式证明了函数凸性的充分条件. 证明的关键是展开点的选取. 泰勒公式是在已知高阶可导的条件下证明不等式的常用方法.

§3 综合例题

【例 3-55】 （浙江大学 2001 年）设 $y=y(x)$ 为可微函数，求 $y'(0)$，其中

$$y=-ye^x+2e^y\sin x-7x.$$

【解】 将 $x=0$ 代入 $y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$ 中，得 $y(0)=0$. 原式两边对 x 求导，$y'=-y'e^x-ye^x+2e^y y'\sin x+2e^y\cos x-7$. 再将 $x=0$ 和 $y(0)=0$ 代入得 $y'(0)=-y'(0)+2-7$. 即 $y'(0)=-\dfrac{5}{2}$.

【例 3-56】（复旦大学 1999 年）设 $y=x^{\sin(\sin x^x)}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 两边取对数，得 $\ln y=\sin(\sin x^x)\ln x$. 两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos(\sin x^x)\cdot\cos x^x[x^x(1+\ln x)]\cdot\ln x+\frac{1}{x}\sin(\sin x^x),$$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\sin(\sin x^x)\left\{\cos(\sin x^x)\cdot\cos x^x[x^x(\ln x+\ln^2 x)]+\dfrac{1}{x}\sin(\sin x^x)\right\}$.

【例 3-57】（复旦大学 1998 年）已知 $y=\tan\cos x^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\sec^2(\cos x^x)\cdot(-\sin x^x)\cdot x^x(1+\ln x)=-\sin x^x\cdot\sec^2(\cos x^x)\cdot x^x(1+\ln x)$.

【例 3-58】（复旦大学 1998 年） 已知 $f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$，其中 $\varphi'(x)$在点 $x=a$ 的某邻域内连续，求 $f''(a)$.

【解】 由 $f'(x)=2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)$知，$f'(a)=0$. 所以

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}[2\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]=2\varphi(a).$$

【例 3-59】（复旦大学 1997 年）设 $y(x)=\begin{cases}3x-\dfrac{1}{2}x^2-2, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 6-x, & x>4\end{cases}$，问 $y(x)$在 $x=4$ 处导数存在吗？并求 $y(x)$的最大值.

【解】 $y(4)=2$，$y'_+(4)=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{y(x)-y(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{(6-x)-2}{x-4}=-1$,

$$y'_-(4)=\lim_{x\to4^-}\frac{y(x)-y(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{\left(3x-\frac{1}{2}x^2-2\right)-2}{x-4}=\lim_{x\to4^-}(3-x)=-1,$$

所以 $y'(4)$存在，且 $y'(4)=-1$. 当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y(x)=3x-\dfrac{1}{2}x^2-2=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{5}{2}$，故$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant4}y(x)=\dfrac{5}{2}$；当 $x>4$ 时，$y(x)=6-x$，故$\sup\limits_{x>4}y(x)=2$. 从而$\max\limits_{x\geqslant0}y(x)=\dfrac{5}{2}$.

【例 3-60】（北京师范大学 1998 年） 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶连续导数，且

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in(-\infty, +\infty),\ \forall h>0.$$

证明 $\forall x\in(-\infty, +\infty)$，$f''(x)\geqslant 0$.

【证明】 由泰勒公式，$\forall x\in(-\infty, +\infty)$，$\forall h>0$，

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2),$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2).$$

两式相加得 $f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+f''(x)h^2+o(h^2)$.

因为 $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant 0$，所以 $f''(x)h^2+o(h^2)\geqslant 0$，令 $h\to 0$ 得，$f''(x)\geqslant 0$.

注 此例同样巧妙地利用了泰勒公式. 结合例 3-54 得到了函数凸性的充分必要条件.

【例 3-61】（北京大学 2000 年） 求 e^{2x-x^2} 到含 x^5 项的泰勒展开式.

【证明】 由 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$,

$$\begin{aligned}e^{2x-x^2}&=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\frac{1}{3!}(2x-x^2)^3+\\&\quad\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o(x^5)\\&=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).\end{aligned}$$

第四章　一元函数积分学

§1　不定积分

一、基本要求

1. 理解原函数与不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式和性质.
3. 掌握不定积分的换元积分法和分部积分法.
4. 会求有理函数、三角函数有理式和某些无理函数的积分.

二、主要概念和结论

1. 设在区间 I 的每一点，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 的一个原函数. $f(x)$ 在区间 I 的原函数全体 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 有原函数，则

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x\quad(\alpha,\beta\text{ 为常数}).$$

3. 第一换元积分法(凑微分法)　设函数 $f(u)$ 在区间 J 有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 在 I 可导，且 $\varphi(I)\subset J$，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}=F(u)\Big|_{u=\varphi(x)}+C$$
$$=F(\varphi(x))+C.$$

4. 第二换元积分法　设 $u=\varphi(x)$ 在区间 I 连续可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$，$f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在区间 I 有原函数 $F(x)$，则

$$\int g(u)\mathrm{d}u=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{x=\varphi^{-1}(u)}+C$$
$$=F(\varphi^{-1}(u))+C.$$

5. 分部积分法　设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导，$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 存在，且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

或
$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x).$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 4-1】 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$； (2) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$； (3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{3x^3} - \left(\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \arctan x + C.$$

(2) 原式 $= \int (2\sec^2 x + \tan^2 x)\mathrm{d}x = \int (3\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = 3\tan x - x + C.$

(3) 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x - 1} = \int \frac{\sec^2 x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x + C.$

【例 4-2】 求一曲线 $y = f(x)$，它在点 $(x, f(x))$ 处的切线的斜率为 $2x$，且通过点 $(2,5)$.

【解】 由已知，$f'(x) = 2x$，故 $f(x) = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$，再由 $f(x)$ 过点 $(2,5)$，知 $f(2) = 2^2 + C = 5 \Rightarrow C = 1$.

【例 4-3】 已知 $f(x)$ 满足给定的关系式，试求 $f(x)$.

(1) $xf'(x) = 1 \quad (x>0)$； (2) $f(x)f'(x) = 1 \quad (x>0)$.

【解】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x}$，两边对 x 积分，得

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ f(x) = \ln x + C.$$

(2) $f(x)f'(x) = 1$，两边对 x 积分，得

$$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x,$$

从而

$$\int f(x)\mathrm{d}f(x) = x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x) = x + C_1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+C}.$$

【例 4-4】 用凑微分法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x(1+2x)}$； (2) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}$； (3) $\int \frac{dx}{A\sin^2 x+B\cos^2 x}$；

(4) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$； (5) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

【解】 (1) 方法一

$$原式 = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{1+2x}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{1+2x}d(2x)$$
$$= \ln\left|\frac{x}{1+2x}\right| + C.$$

方法二

$$原式 = \int \frac{dx}{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)} = -\int \frac{1}{\frac{1}{x}+2}d\frac{1}{x} = -\ln\left|\frac{1}{x}+2\right| + C.$$

(2) $原式 = \int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{e^x+1} + C.$

(3) 若 $A=0$，$原式 = \int \frac{\sec^2 x}{B}dx = \frac{\tan x}{B} + C$；

若 $B=0$，$原式 = \int \frac{\csc^2 x}{A}dx = -\frac{\cot x}{A} + C$；

若 $A\neq 0$，$B\neq 0$ 且 A，B 同号，

$$原式 = \int \frac{\sec^2 x}{A\tan^2 x+B}dx = \frac{1}{B}\int \frac{d\tan x}{1+\frac{A}{B}\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\tan x\right) + C;$$

若 A，B 异号，

$$原式 = \int \frac{d\tan x}{A\tan^2 x+B} = \frac{1}{2\sqrt{-AB}}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{-\frac{B}{A}}}{\tan x+\sqrt{-\frac{B}{A}}}\right| + C.$$

(4) $原式 = \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \tan x - \sec x + C.$

(5) $原式 = \int \frac{\sin x d\sin x}{1+\sin^4 x} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C.$

【例 4-5】 用换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$； (2) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$； (3) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$.

【解】 (1) $原式 = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x+1)-1}{\sqrt{5+x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}} +$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{21}}{2}x-\frac{\sqrt{21}}{4}\right)+C.$$

(2) 不妨设 $a>0$，令 $x=a\tan t$，$|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a^3\sec^3 t}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\mathrm{d}t=\frac{\sin t}{a^2}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

(3) 令 $\sqrt{x+1}+1=t$，则 $x=(t-1)^2-1$，$\mathrm{d}x=2(t-1)\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{t-2}{t}\cdot 2(t-1)\mathrm{d}t=2\int\left(t-3+\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=t^2-6t+4\ln t+C$$

$$=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

【例 4-6】 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 原式 $=-2\int\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+$

$$2\int\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\frac{\mathrm{d}(1+x)}{\sqrt{1+x}}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C.$$

(2) 设 $I=\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$，则

$$I=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-I+C_1,$$

于是
$$I=\frac{1}{2}[x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)]+C.$$

(3) 原式 $=-\int xe^x\mathrm{d}\frac{1}{x+1}=-\frac{xe^x}{x+1}+\int\frac{e^x+xe^x}{x+1}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{xe^x}{x+1}+\int e^x\mathrm{d}x=-\frac{xe^x}{x+1}+e^x+C.$$

(4) 原式 $=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-$$

$$\int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

注　当被积函数为多项式与三角函数或反三角函数或指数函数或对数函数的乘积时，常用分部积分法；若被积函数为三角函数与指数函数的乘积时，常用分部积分法解出一个关于原积分的等式，然后解出原积分.

【例 4-7】　求下列不定积分的递推公式：

(1) $I_n = \int x^n e^{kx} dx$；　(2) $I_n = \int (\ln x)^n dx$；　(3) $I_n = \int \tan^n x dx$；

(4) $I_n = \int (\arcsin x)^n dx$.

【解】　(1) $I_n = \frac{1}{k}\int x^n de^{kx} = \frac{1}{k}x^n e^{kx} - \frac{1}{k}\int e^{kx} n x^{n-1} dx$

$$= \frac{1}{k}x^n e^{kx} - \frac{n}{k}I_{n-1}.$$

(2) $I_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x d(\ln x)^n$

$$= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}.$$

(3) $I_n = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \tan^{n-2} x d\tan x - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

(4) $I_n = \int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n - n\int (\arcsin x)^{n-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= x(\arcsin x)^n + n\int (\arcsin x)^{n-1} d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\int (\arcsin x)^{n-2} dx$$

$$= x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2}.$$

【例 4-8】　求下列有理函数的积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+x^3}$；　(2) $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

【解】　(1) 设$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$，其中$A,B,C$为待定系数，通分，然后令分子相等得：$(A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C = 1$，比较同次幂的系数得线性方程组：

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C - A = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3},$$

$$\text{原式}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{1-x+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\int\frac{x-2}{1-x+x^2}\mathrm{d}x\right).$$

$$\int\frac{x-2}{1-x+x^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{(2x-1)-3}{1-x+x^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{1-x+x^2}-6\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2}$$

$$=2\ln(1-x+x^2)-6\int\frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=2\ln(1-x+x^2)-6\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C_0.$$

$$\text{故原式}=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{2}{3}\ln(1-x+x^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$$

(3) 记 $I(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$, $J(x)=\int\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$, 则

$$I(x)+J(x)=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C_1;$$

$$I(x)-J(x)=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}\right|+C_2=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C_2.$$

所以 $$I(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

【例 4-9】 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{10})}$.

【解】 方法一　原式 $=\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{x^{10}(1+x^{10})}=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x^{10}}{x^{10}(1+x^{10})}$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{1+x^{10}}\right)\mathrm{d}x^{10}=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{1+x^{10}}+C.$$

方法二　原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{11}(x^{-10}+1)}=-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x^{-10}}{x^{-10}+1}$

$$= -\frac{1}{10}\ln(x^{-10}+1)+C.$$

【例 4-10】 求下列三角函数有理式的积分：

(1) $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x}$；　　(2) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$；

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos x}dx$；　　(4) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$.

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{dx}{2+\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{2\sec^2 x+\tan^2 x} = \int \frac{d\tan x}{3\tan^2 x+2}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C.$$

注　本题也可利用万能公式求解.

(2) 记 $I = \int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$J = \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$$I+J = \int dx = x+C_1,$$

$$I-J = \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x} = \ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

于是　　原式 $= I = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C.$

注　本题可令 $\tan x = t$ 进行求解，也很简单.

(3) 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}$

$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{1-\sin^2 x}\right)d\sin x = -\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

(4) 记 $I = \int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$，$J = \int \frac{\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$，则

$$2I+J = \int dx = x+C_1,$$

$$I-2J = \int \frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx = \int \frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x} = \ln|\sin x+2\cos x|+C_2,$$

解得　　$I = \frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$

【例 4-11】 求下列无理函数的积分：

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$；　(2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$；　(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$.

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right|+C.$$

(2) 原式 $=\int\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\xrightarrow{令\frac{1}{x}=t}-\int\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\mathrm{d}t$

$$=-\int\frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$=-\sqrt{t^2-1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\ln\left|\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+C.$$

(3) 令 $\sqrt[4]{1+x^4}=t$，则

$$x=(t^4-1)^{\frac{1}{4}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}(t^4-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4t^3\mathrm{d}t,$$

于是

$$原式=\int\frac{1}{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}\cdot t}\cdot\frac{1}{4}(t^4-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4t^3\mathrm{d}t=\int\frac{t^2}{t^4-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}\right|+C.$$

【例 4-12】 计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

【解】 令 $x=\sin t$，则

$$原式=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t+\cos t+\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln\left|\sin t+\cos t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+C.$$

§2 定积分

一、基本要求

1. 理解定积分的概念、几何意义和物理意义.

2. 掌握定积分的性质和定积分中值定理.

3. 理解由变限定积分定义的函数，并会求它的导数.

4. 掌握牛顿-莱布尼茨公式.

5. 掌握定积分的换元积分法和分部积分法.

6. 理解函数可积的充要条件，掌握几类函数(连续函数、具有有限个间断点的有界函数)的可积性.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$有定义. 下面分四步来概述定积分的定义:

① 分割：在$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将$[a,b]$分成 n 个小区间(称为$[a,b]$的一个分法，记为 Δ)，小区间的长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$；

② 取点：在每个小区间上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$；

③ 作和：$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$(该和式称为黎曼和)；

④ 求极限：记 $\lambda=\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$，若极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在(设为 I)，则称 $f(x)$ 在$[a,b]$黎曼可积，简称可积. 极限 I 称为$f(x)$ 在$[a,b]$的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 定积分的基本性质

(1) 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$有界.

(2) 线性性质　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$可积，α 与β 为任意实数，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在$[a,b]$也可积，并且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 区间可加性　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，则对于任意给定的 $c\in[a,b]$，$f(x)$ 在$[a,c]$和$[c,b]$都可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 单调性　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，$\forall x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(5) 绝对可积性　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，则 $|f(x)|$ 在$[a,b]$也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

(6) 积分第一中值定理　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$g(x)$ 在$[a,b]$可积，且 $g(x)$ 在$[a,b]$不变号，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(7) 积分第二中值定理　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，$g(x)$ 在$[a,b]$单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

特别，若 $g(x)$ 单调上升且 $g(a)\geqslant 0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x;$$

若 $g(x)$ 单调下降且 $g(b)\geqslant 0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 定积分的计算

(1) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在$[a,b]$连续. 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，则 $F(x)$ 在$[a,b]$可导，且 $F'(x)=f(x)$，$\forall x\in[a,b]$.

由此可见，若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，则其原函数存在.

(2) 微积分基本公式　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

特别，由(1)可知，若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，该公式一定成立.

这个公式也称为牛顿-莱布尼茨公式.

(3) 换元积分法　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$x=\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$有连续的导数 $\varphi'(t)$，且满足 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，$t\in[\alpha,\beta]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在$[a,b]$有连续的导数，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

4．达布和　设 $f(x)$ 在$[a,b]$有界，记 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 对$[a,b]$的任意分法 Δ：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，记 $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 分别称 $S=\sum\limits_{i=1}^n M_i\Delta x_i$，$s=\sum\limits_{i=1}^n m_i\Delta x_i$ 为 $f(x)$ 对这一分法的达布上和与达布下和，简称上和与下和，统称为达布和.

5．达布和的主要性质

(1) 对$[a,b]$的同一分法，S 与 s 分别是所有黎曼和的上确界与下确界，即

$$S=\sup_{x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,\quad s=\inf_{x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

并且
$$m(b-a)\leqslant s\leqslant\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S\leqslant M(b-a).$$

(2) 若在$[a,b]$的一个分法 Δ 的分点外插入新的分点以构成新的分法 Δ'，则达布上和不增，达布下和不减.

(3) 任一个下和总不超过任一个上和，即使它们对应于不同的分法.

由此可知，全体下和集合有上界，全体上和集合有下界. 根据确界定理，全体下和集合有上确界 $\underline{I}$，全体上和集合有下确界 $\overline{I}$，分别称 $\underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$的下积分和上积分，并且有 $s\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant S$ 及 $\lim\limits_{\lambda\to0}S=\overline{I}$，$\lim\limits_{\lambda\to0}s=\underline{I}$.

这一结论通常称为达布定理.

6．可积的充要条件

(1) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积的第一充要条件：$\underline{I}=\overline{I}$.

(2) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积的第二充要条件：$\lim\limits_{\lambda\to0}(S-s)=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i$

$= 0$，或 $\forall \epsilon > 0$，存在某种分法 Δ，使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$. 其中 $\omega_i = \omega_i(f) = M_i - m_i$，它称为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅 $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的第三充要条件：$\forall \epsilon > 0$，$\forall \sigma > 0$，存在某种分法 Δ，使得对应于振幅 $\omega_{k'} \geqslant \sigma$ 的小区间 Δx_k 的总长度 $\sum_{k'} \Delta x_{k'} < \epsilon$.

7. 可积函数类　以下三类定义在 $[a,b]$ 的函数在 $[a,b]$ 必可积：

(1) 连续函数；

(2) 只有有限个间断点的有界函数；

(3) 单调函数.

三、常用解题方法与典型例题

【例 4-13】　用定义求积分 $\int_a^b x\mathrm{d}x \quad (0 < a < b)$.

【解】　因为 $f(x) = x$ 在 $[a,b]$ 连续，所以必可积. 将 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，第 i 个小区间为 $\left[a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1),\ a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right]$，其长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，$i = 1,2,\cdots,n$. 在每一个小区间取 $\xi_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i$，作和

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{N}\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right)\cdot\frac{b-a}{n}\\ &= \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= (b-a)\left[a + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{(n+1)}{2}\right].\end{aligned}$$

所以
$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

【例 4-14】　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，证明

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\xi_i, \theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$.

【证明】　因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，故 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 连续，从而 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，由定积分的定义可知：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i.$$

又

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\xi_i)+g(\theta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\theta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i,$$

由 $f(x)$在$[a,b]$连续知，$\exists M>0$，$|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$. 因为 $g(x)$在$[a,b]$连续，故 $g(x)$在$[a,b]$一致连续，于是$\forall \epsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $\lambda<\delta$ 时，有

$$|g(\theta_i)-g(\xi_i)|\leqslant\frac{\epsilon}{M(b-a)}\quad (i=1,2,3,\cdots,n).$$

所以 $\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)[g(\theta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\,|g(\theta_i)-g(\xi_i)|\,|\Delta x_i|$

$$\leqslant M\cdot\frac{\epsilon}{M(b-a)}\cdot(b-a)=\epsilon,$$

故 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

【例 4-15】 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$； (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n+1)}$.

【解】 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

(2) 原式 $= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\sqrt[n]{\frac{n}{n}\,\frac{n+1}{n}\cdots\frac{2n-1}{n}(2n)(2n+1)}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdots\frac{2n-1}{n}(2n)(2n+1)}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n)+\ln(2n+1)}{n}\right)$$

$$=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)=\exp(\ln 4-1)=4\mathrm{e}^{-1}.$$

【例 4-16】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$f(x)\geqslant 0$，$f(x)\not\equiv 0$，证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

【证明】 因为 $f(x)\not\equiv 0$ 且 $f(x)\geqslant 0$，不妨设$\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$，又 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，故 $\exists\delta>0$，使得 $f(x)>\frac{f(c)}{2}>0$，$\forall x\in(c-\delta,c+\delta)\subset(a,b)$，于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c-\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c-\delta}^{c+\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta > 0.$$

【例 4-17】 设 $f'(x)$在$[a,b]$连续，且 $f(a)=0$，求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|.$$

【证明】 方法一　因为 $f'(x)$在$[a,b]$连续，所以$|f'(x)|$在$[a,b]$有最大值，设 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$．对 $f(x)$在$[a,x]$ $(x\in(a,b])$应用拉格朗日中值定理得，$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，其中 $a<\xi<x$．从而，

$$|f(x)|\leqslant M(x-a).$$

所以
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x$$

$$= M\cdot\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}\cdot M.$$

方法二　同样设 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$．由分部积分法得，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-b) = f(x)(x-b)\Big|_a^b - \int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b (b-x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (b-x)f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |(b-x)f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}\cdot M.$$

【例 4-18】 设 $0<\delta<1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t}=0$.

【证明】 $$0\leqslant \frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t} = \frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_{\frac{\delta}{2}}^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\delta}{2}}(1-t^2)^n\mathrm{d}t}$$

$$< \frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(1-t^2)^n\mathrm{d}t} \leqslant \left[\frac{1-\delta^2}{1-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\right]^n \cdot \frac{1-\delta}{\frac{\delta}{2}}.$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\delta^2}{1-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\right]^n \cdot \frac{1-\delta}{\frac{\delta}{2}} = 0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t}{\int_{0}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t}=0.$$

【例 4-19】 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$连续，求证
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x},$$
而且等号成立当且仅当 $g(x)=\lambda f(x)$ （或 $f(x)=\lambda g(x)$），其中 λ 为常数.

【证明】 考察积分$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x$，其中 λ 为任意实数. 因为
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$
这是关于 λ 的不等式，且左端为二次三项式，所以其判别式
$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^2-\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$
即
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$
因 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$连续，故
$$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)=\lambda g(x).$$
又
$$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\left\{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^2-\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=0,$$
所以
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\Leftrightarrow f(x)=\lambda g(x).$$

注 该不等式称为施瓦茨不等式. 它有很多重要的应用. 它可以看作柯西不等式$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2$在“连续”情形下的表现形式.

【例 4-20】 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2x}\,\mathrm{d}x$； (2) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 原式 $=\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=2$.

(2) 原式 $= \int_1^e \ln x \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_1^e - (x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^1$

$= 2 - 2e^{-1}$.

【例 4-21】 计算下列定积分：

(1) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}$； (3) $\int_0^3 \frac{x\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{1 + x}}$；

(4) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x$； (5) $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

【解】 (1) 不妨设 $a \geqslant 0$，令 $x = a\sin t$，则

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t \cdot a\cos t \cdot a\cos t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{16}a^4.$$

(2) 令 $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是，

$$原式 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t}{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\sec^3 t}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\mathrm{d}t = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

(3) 令 $\sqrt{1 + x} = t$，则 $x = t^2 - 1$，$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，当 $x = 0$ 时，$t = 1$；当 $x = 3$ 时，$t = 2$.

$$原式 = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)2t\mathrm{d}t}{1 + t} = 2\int_1^2(t^2 - t)\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{3}.$$

(4) 令 $t = x^2$，

$$原式 = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} te^{-t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}te^{-t}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{1 - \ln 2}{4}.$$

(5) 令 $x = a\sin t$，

$$原式 = \int_0^a x^2 \frac{a - x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t \frac{a - a\sin t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t$$

$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t - \sin^3 t)\mathrm{d}t = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\mathrm{d}t + a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2 t)\mathrm{d}\cos t$$

$$= a^3\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^3\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^3.$$

【例 4-22】 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,$$

于是

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故

$$I=\frac{\pi}{4}.$$

【例 4-23】 设 $f(x)$ 在所示区间是连续函数，证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{a^2}f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ $(a>0)$；

(4) $\int_0^a x^3f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $x=\pi-t$，则

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(3) 令 $x^2=t$，则 $x=\sqrt{t}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，于是

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\int_1^{a^2}f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2x}.$$

(4) 令 $x^2 = t$，则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}x^2 f(x^2)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x.$$

【例 4-24】 利用分部积分证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.$$

【证明】 方法一

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= \int_0^x (x-u)\mathrm{d}\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= (x-u)\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\Big|_0^x - \int_0^x\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}(x-u) \\
&= 0 + \int_0^x\left(\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \text{右端}.
\end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}
\text{右端} &= u\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\Big|_0^x - \int_0^x u\mathrm{d}\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - 0 - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u \\
&= \text{左端}.
\end{aligned}$$

【例 4-25】 设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a) = f(b) = 0$，求证：

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

【证明】 (1)

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}f'(x) \\
&= \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)[(x-a)+(x-b)]\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_a^b (x-b)\mathrm{d}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}f(x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-b)f(x)\Big|_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f(x)(x-a)\Big|_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{左边}.
\end{aligned}$$

(2) 由(1)知，

$$\text{左边} = \left|\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot$$

$$\left|\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12}\cdot\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

【例 4-26】 证明连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数，连续的偶函数的原函数中有且只有一个为奇函数.

【证明】 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 连续，则 $f(x)$ 的一切原函数可写成 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$. 当 $f(-x)=-f(x)$ 时，利用换元积分法可得，$F(-x)=F(x)$，即 $f(x)$ 的任一原函数为偶函数. 当 $f(x)=f(-x)$ 时，同理可得，只有当 $C=0$ 时，$F(-x)=-F(x)$，于是 $f(x)$ 仅有一个原函数是奇函数.

【例 4-27】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

【解】 这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的待定型，由洛必达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0.$$

【例 4-28】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调上升，求证函数 $F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 可导且单调上升.

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导. $\forall x\in(0,+\infty)$，由 $f(x)$ 的单调性知：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant(x-0)f(x)$，从而 $f(x)-\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$，所以

$$F'(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left[f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\geqslant 0,$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调上升.

【例 4-29】 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续，对任意 $a,b>0$，积分值 $\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，求证 $f(x)=\dfrac{c}{x}$（c 为常数）.

【证明】 令 $h(x)=\int_x^{bx} f(t)\mathrm{d}t$，则 $h(x)$ 在 $x>0$ 时可导，由于 $\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$

与 a 无关，所以 $h'(x) = (bx)'f(bx) - f(x) = bf(bx) - f(x) = 0$. 令 $x = 1$，则 $bf(b) - f(1) = 0$，即 $bf(b) = f(1)$，由 b 的任意性知 $xf(x) = f(1)$. 取 $c = f(1)$，得 $f(x) = \frac{c}{x}$.

【例 4-30】（武汉大学 2000 年） 设 $f(x)$ 在任一有限区间可积分，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l$.

【证明】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ 知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X_1 > 0$，当 $x > X_1$ 时，有 $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是，对于 $x(x > X_1 > 0)$，有

$$\left|\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} - l\right| = \left|\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x l\mathrm{d}x}{x}\right| = \frac{\left|\int_0^x [f(t) - l]\mathrm{d}t\right|}{x}$$

$$\leqslant \frac{\int_0^x |f(t) - l|\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l|\mathrm{d}t}{x} + \frac{\int_{X_1}^x \varepsilon\mathrm{d}t}{2x}$$

$$= \frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l|\mathrm{d}t}{x} + \frac{\varepsilon(x - X_1)}{2x},$$

由于 $\int_0^{X_1} |f(t) - l|\mathrm{d}t$ 为常数，故 $\exists X_2 > 0$，当 $x > X_2$ 时，$\frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l|\mathrm{d}t}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，则当 $x > X$ 时，$\left|\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l$.

注 (1) 本题的典型错误证法是：对 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 应用洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

(2) 本题与例 1-25 是同一个极限过程在变量为"连续的"和"离散的"情形下的不同表现形式.

(3) 可类似地证明：当 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 时，结论仍成立.

【例 4-31】 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，其积分是 I，今在 $[a, b]$ 内有限个点改变 $f(x)$ 的值使它成为另一函数 $f^*(x)$，证明 $f^*(x)$ 也在 $[a, b]$ 可积，并且积分为 I.

【证明】 令$F(x)=f(x)-f^*(x)$, $x\in[a,b]$. 则$F(x)$在$[a,b]$除有限个点外处处为零，即$F(x)$在$[a,b]$除有限个点外处处连续，故$F(x)$在$[a,b]$可积，且$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=0$. 又可积函数之差仍为可积函数，故$f^*(x)=f(x)-F(x)$在$[a,b]$可积，且$\int_a^b f^*(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=I-0=I$.

【例 4-32】 设有界函数$f(x)$在$[a,b]$的不连续点全体为$\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$，且$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，证明$f(x)$在$[a,b]$可积.

分析 由$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有$x_n\in[a,a+\varepsilon)$. 把$[a,b]$分成两部分：$[a,a+\varepsilon)$中虽然含$f(x)$的无穷多个不连续点，但$f(x)$在其有界，且区间长度不大于$\varepsilon$；在$[a+\varepsilon,b]$中$f(x)$只有有限个不连续点，故$f(x)$在$[a+\varepsilon,b]$可积. 利用函数可积的充要条件可得$f(x)$的可积性.

【证明】 方法一(利用可积的第二充要条件) 设$|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a,b]$. 由$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有$x_n\in\left[a,a+\frac{\varepsilon}{2M}\right)$. 于是在$\left[a+\frac{\varepsilon}{2M},b\right]$中$f(x)$只有有限个不连续点，故$f(x)$在$\left[a+\frac{\varepsilon}{2M},b\right]$可积. 从而存在$\left[a+\frac{\varepsilon}{2M},b\right]$的分法$\Delta'$，使$\sum\limits_{\Delta'}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. 而对$\left[a,a+\frac{\varepsilon}{2M}\right]$的任一分法$\Delta''$，总有$\sum\limits_{\Delta''}\omega_i\Delta x_i<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$. 把$\Delta'$与$\Delta''$的分点合起来，构成$[a,b]$的一个分法$\left(\text{此时 } x=a+\frac{\varepsilon}{2M}\text{ 为分点}\right)$，记为$\Delta$，有$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{\Delta'}\omega_i\Delta x_i+\sum\limits_{\Delta''}\omega_i\Delta x_i<2\varepsilon$. 由可积的第二充要条件知$f(x)$在$[a,b]$可积.

方法二 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\sigma>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有$x_n\in\left[a,a+\frac{\varepsilon}{2}\right]$. 在$\left[a+\frac{\varepsilon}{2},b\right]$中$f(x)$只有有限个(最多$N$个)不连续点，从而与它们相关的子区间最多只有$2N$个，在其有$\omega_{k'}\geqslant\sigma$. 不妨设$f(x)$在$\left[a,a+\frac{\varepsilon}{2}\right]$的振幅$\omega\geqslant\sigma$. 作$\left[a+\frac{\varepsilon}{2},b\right]$的分法$\Delta'$，使对应的$\lambda(\Delta')<\frac{\varepsilon}{4N}$. 在分法$\Delta'$的基础增加分点$a$和$a+\frac{\varepsilon}{2}$，得到$[a,b]$的一个分法$\Delta$，则在分法$\Delta$

下所有对应振幅 $\omega_{k'}\geqslant\sigma$ 的子区间长度之和 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\frac{\varepsilon}{2}+2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}=\varepsilon$，由可积的第三充要条件知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积．

【例 4-33】 判断下列函数在区间 $[0,1]$ 的可积性：

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界，不连续点为 $x=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

【解】 本题两个小题都是例 4-32 的特例．也可以直接证明，下面仅对(2)给出证明．

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界，其不连续点是 $0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，并且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的任何部分区间的振幅 $\omega\leqslant 2$．$\forall\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{6},1\right]$ 只有有限个间断点，故可积．因此 $\exists\eta>0$，使对 $\left[\frac{\varepsilon}{6},1\right]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，就有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{6}$．显然，若 $[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{6},1\right]$，则对于 $[\alpha,\beta]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{6}$．令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{6},\eta\right\}$，现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0}<x_{i_0+1}<\cdots<x_n=1$ 是 $[0,1]$ 的满足 $\max|\Delta x_{i'}|<\delta$ 的任一分法．设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{6}<x_{i_0+1}$，因此，有 $\sum\limits_{i=i_0+1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{6}$．显然

$$\sum_{i=1}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum_{i=1}^{i_0}\Delta x_i<2\cdot\frac{2\varepsilon}{6}=\frac{4\varepsilon}{6}.$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\omega_{i_0+1}\Delta x_{i_0+1}+\sum_{i=i_0+2}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{4\varepsilon}{6}+\frac{2\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}$$

由此可知，$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$．故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间可积．

【例 4-34】 若函数 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 可积，证明：

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0,$$

其中 $A < a < b < B$(这一性质称为积分的连续性).

【证明】 因 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 可积,故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathrm{N}^{+}$, $\forall n > N$, 使得对 $[A,B]$ 的 n 等分法 Δ: $x_i = A + \frac{i}{n}(B-A)$, $i = 0,1,2,\cdots,n$, 满足: $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\epsilon}{4}$, 其中 ω_i 是 $f(x)$ 在第 i 小区间的振幅. 取 $\delta = \min\left\{a-A, B-b, \frac{B-A}{n}\right\}$, 则当 $0<h<\delta$ 时,

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[|f(x+h)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(x)|]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\omega_{i+1}+\omega_i)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(\omega_{i+1}+\omega_i)\Delta x_i < \epsilon.$$

由此可得,当 $h \to 0^{+}$ 时结论成立. 同理可证 $h \to 0^{-}$ 时结论也成立.

§3 定积分的应用

一、基本要求

1. 掌握微元法,会用定积分表达和计算一些物理量(液体压力、功、平均值).

2. 掌握用定积分表达和计算平面图形的面积、旋转体的体积、已知截面面积的立体体积、曲线的弧长.

二、主要概念和结论

1. 平面图形的面积(见图 4-1)

(1) 设图形由 $x=a$, $x=b(a<b)$, $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成,其面积为

$$A_2 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \text{(当 } f(x) \geqslant 0 \text{ 时,为 } A_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{)}.$$

(2) 设图形由 $x=a$, $x=b(a<b)$, $y=f(x)$ 以及 $y=g(x)$ 所围成,其面积为

$A_4 = \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$(当 $f(x) \geqslant g(x)$ 时,为 $A_3 = \int_a^b [f(x) -$

$g(x)]\mathrm{d}x)$.

(3) 设图形由 $\theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$, $r=r(\theta)$ 所围成，其面积为

$$A_5=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(4) 设图形由 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 及 $r=r_1(\theta)$, $r=r_2(\theta)$ $(r_1\leqslant r_2)$ 所围成，其面积为

$$A_6=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

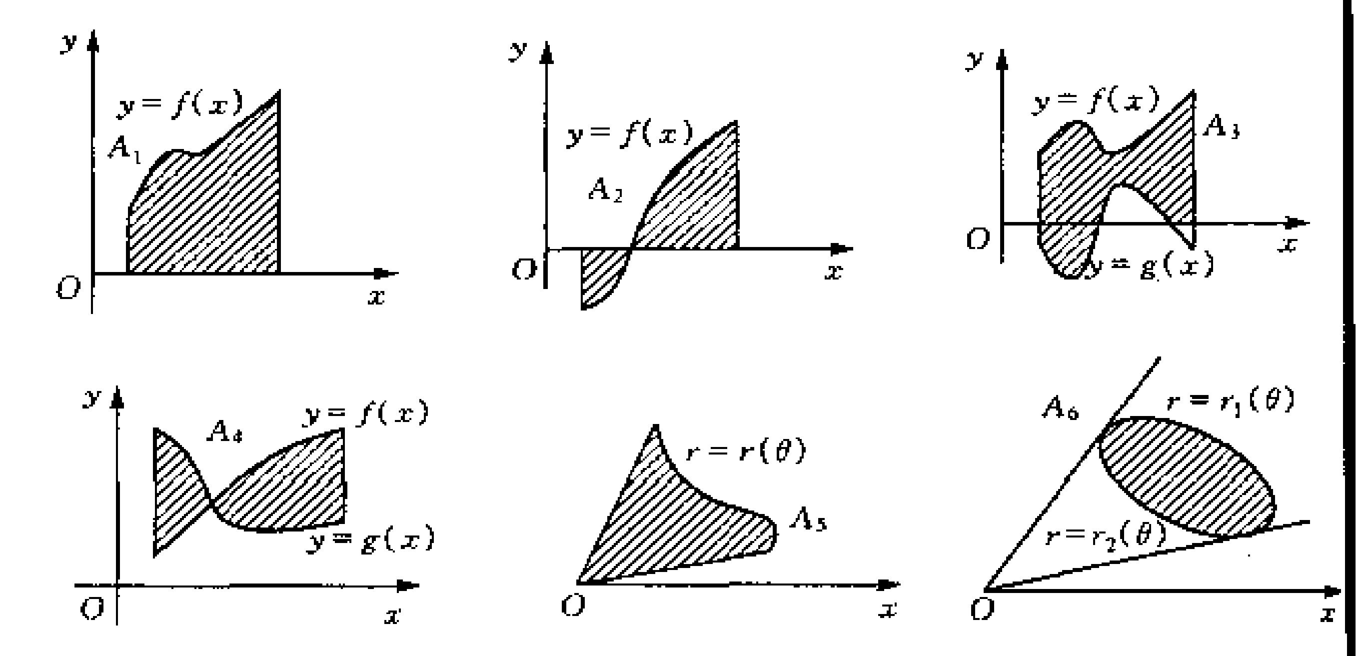


图 4-1

2. 光滑曲线的弧长

对于有向曲线弧，弧长元素(弧微分)：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，由此可知：

在直角坐标系：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+[x'(y)]^2}\mathrm{d}y$；

参数方程：$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$；

极坐标系：$\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$.

(1) 若平面曲线由 $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 给出，则其弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 若平面曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 给出，则其弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

(3) 若平面曲线由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 给出，则其

弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

(4) 若空间曲线由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 给出，则其弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

3. 已知截面面积的立体体积

(1) 立体位于平面 $x = a$ 和 $x = b(a < b)$ 之间，对每个 $x \in [a,b]$，过 x 点且垂直于 x 轴的平面与立体的截面面积为 $A(x)$，则立体体积

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由连续曲线 $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

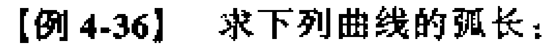
4. 由连续曲线 $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 4-35】 求双纽线 $r^2 = a^2\cos^2 2\varphi$ 所围图形的面积.

【解】 由对称性知，$A = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi = a^2$.



【例 4-36】 求下列曲线的弧长：

(1) $y = \mathrm{e}^x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

(2) 星射线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(3) 心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

【解】 (1) $s = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$

$$= \left(\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}} + 1}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \sqrt{1 + \mathrm{e}^4} - \sqrt{1 + \mathrm{e}^2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^4}-1}{\sqrt{1+e^4}+1}\cdot\frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{1+e^2}-1}\right).$$

(2) $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{[3a\cos^2t(-\sin t)]^2+[3a\sin^2t\cos t]^2}\mathrm{d}t$$

$$=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4t\sin^2t+\sin^4t\cos^2t}\,\mathrm{d}t=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2t\cos^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3a}{4}\int_0^{2\pi}|\sin2t|\,\mathrm{d}2t=\frac{3a}{4}\int_0^{4\pi}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=6a.$$

(3) $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+(-a\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\frac{\theta}{2}=8a.$$

【例 4-37】 已知球半径为 R，试求高为 h 的球冠的体积($h\leqslant R$).

【解】 设球的方程为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，用平面 $Z=z(h\leqslant z\leqslant R)$ 去截球所得截面面积为 $A(z)=\pi(R^2-z^2)$

$$V=\int_h^R A(z)\mathrm{d}z=\int_h^R\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{2R^3}{3}-R^2h+\frac{h^3}{3}\right).$$

【例 4-38】 求下列各曲线所围成的图形面积：

(1) $y^2=4(x+1)$，$y^2=4(1-x)$；

(2) $y=x$，$y=x+\sin^2x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$；

(3) $y=x^2$，$y=x+5$.

【解】 (1) $S=\int_{-2}^2\left[\left(1-\frac{y^2}{4}\right)-\left(\frac{y^2}{4}-1\right)\right]\mathrm{d}y=\int_{-2}^2\left(2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$

$$=\left(2y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^2=\frac{16}{3}.$$

(2) $S=\int_0^\pi[(x+\sin^2x)-x]\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

(3) $S=\int_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}(x+5-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}+5\sqrt{21}-2\sqrt{21}=\frac{7\sqrt{21}}{2}.$$

【例 4-39】 求下列旋转体的体积：

(1) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 x 轴；

(2) $y=\sin x$, $y=0\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ （ⅰ）绕 x 轴,（ⅱ）绕 y 轴；

(3) 旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$

（ⅰ）绕 x 轴；（ⅱ）绕 y 轴；（ⅲ）绕直线 $y=2a$.

【解】 (1) $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

(2)（ⅰ）$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$;

（ⅱ）$V=\pi\int_0^1[(\pi-\arcsin y)^2-(\arcsin y)^2]\mathrm{d}y$

$$=\pi\int_0^1(\pi^2-2\pi\arcsin y)\mathrm{d}y=\pi^3-2\pi^2\int_0^1\arcsin y\mathrm{d}y=2\pi^2.$$

(3)（ⅰ）绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$A_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}[a(t-\sin t)]$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{7}{2}\pi^2a^3;$$

（ⅱ）绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$A_y=\pi\int_0^a[x_1^2(y)-x_2^2(y)]\mathrm{d}y$$

$$=a^3\pi\int_0^{\pi}[(2\pi-t+\sin t)^2-(t-\sin t)^2]\sin t\mathrm{d}t$$

$$=4a^3\pi^2\int_0^{\pi}(\pi-t+\sin t)\sin t\mathrm{d}t=2a^3\pi^3(2\pi+1);$$

（ⅲ）绕直线 $y=2a$ 旋转所得旋转体的体积为

$$A_{y=2a}=\pi\int_0^{2\pi a}[(2a)^2-(2a-y)^2]\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi a}(4a-y)y\mathrm{d}x$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\pi}(3+\cos t)(1-\cos t)(1-\cos t)\mathrm{d}t=\frac{7\pi^2a^3}{3}.$$

【例 4-40】 求曲线 $xy=4$ 在点(2,2)的曲率和曲率半径.

【解】 $y=\frac{4}{x}$, $y'=-\frac{4}{x^2}$, $y''=\frac{8}{x^3}$.

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{8}{x^3}\left(1+\frac{16}{x^4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ R=\frac{1}{K}=2\sqrt{2}.$$

【例 4-41】 求抛物线 $y^2=2px(p>0)$的曲率和曲率半径.

【解】 $2yy'=2p,\ y'=\frac{p}{y},\ y''=-\frac{p}{y^2}\cdot y'=-\frac{p^2}{y^3},\ K=\left|\frac{-\frac{p^2}{y^3}}{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right|=$
$\frac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}},\ R=\frac{1}{K}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$

【例 4-42】 求平面曲线 $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ 绕 x 轴旋转所成曲面的面积.

【解】 (1) $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=-2\pi\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x=2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\pi[\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|]\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(1+\sqrt{2}).$$

§4 综合例题

【例 4-43】 (复旦大学 1999 年) 求不定积分$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

【解】 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\int\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

【例 4-44】 计算 $I=\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【解】 方法一 用第一、第二换元积分法.

$$I=\int\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du=-\int\frac{\sec t\tan t}{\tan t}dt\quad(令\ u=\sec t)$$

$$=-\ln|\sec t+\tan t|+C=-\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$$

方法二　令 $x=\sin t$，得

$$I=\int\frac{\cos t}{\sin t\cos t}dt=\int\csc t\,dt=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

方法三　令 $x^2=\frac{1}{t}$，得

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t\sqrt{1-\frac{1}{t}}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-t}}dt=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$$

方法四　令 $t=\sqrt{1-x^2}$.

方法五　令 $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

【例 4-45】（浙江大学　2001 年）　求$\int\frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

【解】　$x^3-3x+2=x^3-1-3x+3=(x-1)^2(x+2)$，令

$$\frac{1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

可解得
$$A=-\frac{2}{9},\ B=\frac{2}{9},\ C=\frac{1}{3}.$$

于是

$$原式=-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+2|+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

【例 4-46】（浙江大学　2002 年）　求不定积分$\int\sqrt{1+x^2}dx$.

【解】　设 $I=\int\sqrt{1+x^2}dx$. 令 $x=\tan t$，$|t|<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{1+x^2}=\sec t,\ dx=d\tan t.$$

$$I=\int \sec t\,\mathrm{d}\tan t=\sec t\tan t-\int \tan t\,\mathrm{d}\sec t=\sec t\tan t-\int \sec t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\sec t\tan t-\int \sec t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=\sec t\tan t-I+\int \sec t\,\mathrm{d}t.$$

故 $$I=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\int \sec t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\int \sec t\,\frac{\sec t+\tan t}{\sec t+\tan t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan t+\sec t)}{\sec t+\tan t}$$

$$=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\ln|\tan t+\sec t|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【例 4-47】 （上海交大 2000 年；北师大 2004 年） 设 f 在$[a,b]$连续且单调增加. 证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

并证明式中，等号仅当 f 为常值函数时成立.

【证明】 方法一 由于 $f(x)$单调上升，利用积分第二中值定理，则$\exists\,\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+[f(b)-f(a)]\cdot\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=[f(b)-f(a)]\left[\frac{b^2-\xi^2}{2}-\frac{a+b}{2}(b-\xi)\right]$$

$$=[f(b)-f(a)]\frac{(b-\xi)(\xi-a)}{2}\geqslant 0.$$

方法二 $$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

在前一个积分中，令 $y=x-a$，在后一个积分中，令 $y=b-x$，则有

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{b-a}{2}-y\right)[f(b-y)-f(a+y)]\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

因此
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

方法三　作辅助函数(把 b 改为变量 t):

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

则易知 $F'(t)\geqslant 0$, $t\in[a,b]$, 故 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 单调上升. 从而 $F(b)\geqslant F(a)=0$.

若等号成立, 则应有 $f(b)-f(a)=0$, 而 f 在 $[a,b]$ 单调增加, 所以当 f 为常值函数时才能成立.

【例 4-48】(东南大学　2003 年)　求积分

$$\int_{-2}^{2}x^2\left(\frac{\sin^3 x}{1+x^6}+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

【解】　因为 $y=\dfrac{x^2\sin^3 x}{1+x^6}$ 在 $[-2,\ 2]$ 为奇函数, 故

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^2\sin^3 x}{1+x^6}\mathrm{d}x=0.$$

于是

$$\text{原式}=\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x,$$

令 $x=2\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}x=2\cos\theta\mathrm{d}\theta$, 则

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

【例 4-49】(电子科技大学　2003 年)　设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$, 证明 $\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.

【证明】　$f(x)=\int_x^{x+1}\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\cos(\mathrm{e}^t)$

$$=-\mathrm{e}^{-t}\cos(\mathrm{e}^t)\Big|_x^{x+1}+\int_x^{x+1}-\mathrm{e}^{-t}\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\cos(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}-\frac{\cos(\mathrm{e}^{x+1})}{\mathrm{e}^{x+1}}+\cos(\mathrm{e}^{\xi})\int_x^{x+1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^x}\left[\cos(\mathrm{e}^x)-\frac{1}{\mathrm{e}}\cos(\mathrm{e}^{x+1})\right]+$$

$$\frac{1}{e^x}\left[\frac{1}{e}\cos(e^{\xi})-\cos(e^{\xi})\right], \qquad (x<\xi<x+1)$$

故
$$e^x|f(x)|=\left|\cos(e^x)-\frac{1}{e}\cos(e^{x+1})-\cos(e^{\xi})\left(1-\frac{1}{e}\right)\right|$$
$$\leqslant 1+\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)=2.$$

【例 4-50】（华中师大 1998 年） 设 $f(x)$在$[0,1]$可微，而且对$\forall x\in(0,1)$，有$|f'(x)|\leqslant M$，求证：对任何正整数 n，有
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n},$$
其中 M 是一个与 x 无关的常数.

【证明】 由定积分的性质及积分中值定理，有
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i).$$
其中 $\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，$i=1,2,\cdots,n$. 又因为 $f(x)$在$[0,1]$可微，所以由拉格朗日中值定理可知，存在 $\eta_i\in\left(\xi_i,\frac{i}{n}\right)$，使得
$$f\left(\frac{i}{n}\right)-f(\xi_i)=f'(\eta_i)\left(\frac{i}{n}-\xi_i\right),\ i=1,2,\cdots,n.$$
因此
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|$$
$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)-\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_i)\left(\xi_i-\frac{i}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f'(\eta_i)|\left(\frac{i}{n}-\xi_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}M\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{M}{n}.$$

【例 4-51】 设 $f(x),g(x)$都在$[a,b]$可积，证明：
$$M(x)=\max(f(x),g(x)),\ m(x)=\min(f(x),g(x))$$
在$[a,b]$可积.

【证明】 由于$M(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$，
$$m(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$
又 $f(x),g(x)$ 都在$[a,b]$可积，故 $f(x)\pm g(x)$ 在$[a,b]$可积，也有$|f(x)-g(x)|$在$[a,b]$可积. 由定积分的性质，知 $M(x)$，$m(x)$ 都在$[a,

b]可积.

【例 4-52】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，且 $f(x)\geqslant r>0$，求证：

(1) $\dfrac{1}{f(x)}$ 在$[a,b]$可积； (2) $\ln f(x)$ 在$[a,b]$可积.

【证明】 由条件，$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于满足 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|<\delta$ 的任意分法 Δ，有 $\left|\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<\epsilon$. 其中

$$\omega_i(\Delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|\},\ \forall x',x''\in[x_i,x_{i+1}].$$

(1) $\omega'_i(\Delta)=\sup\left\{\left|\dfrac{1}{f(x')}-\dfrac{1}{f(x'')}\right|\right\}$，$x',x''\in[x_i,x_{i+1}]$.

而
$$\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|=\frac{|f(x'')-f(x')|}{|f(x')f(x'')|}\leqslant\frac{|f(x'')-f(x')|}{r^2},$$

所以有
$$\omega'_i\leqslant\frac{1}{r^2}|f(x')-f(x'')|.$$

则有
$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega'_i\Delta x_i\right|\leqslant\left|\frac{1}{r^2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|\leqslant\frac{\epsilon}{r^2}.$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$ 在$[a,b]$可积.

(2) 同理可证 $\ln f(x)$ 在$[a,b]$可积.

【例 4-53】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，求证对任给 $\epsilon>0$，存在逐段为常数的函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\epsilon.$$

【证明】 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，则 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，对$[a,b]$的任一满足 $\lambda(\Delta)<\delta$ 的分法，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\epsilon$. 其中

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)-\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x).$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-m_i]\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\epsilon.$$

定义 $\varphi(a)=m_1$，$\varphi(x)=m_i$，$x\in(x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，便有

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\epsilon.$$

【例 4-54】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$有界，定义 $\omega_f[a,b]=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)-$

$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，求证

$$\omega_f[a,b]=\sup_{x',x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|.$$

【证明】 由于 $\sup\limits_{x\in[a,b]}(-f(x))=-\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 设 $\alpha=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，则 $-\alpha=\sup\limits_{x\in[a,b]}(-f(x))$，从而

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)=\sup_{x'\in[a,b]}f(x')+\sup_{x''\in[a,b]}[-f(x'')]$$
$$=\sup_{x',x''\in[a,b]}[f(x')-f(x'')]=\sup_{x',x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|.$$

【例 4-55】 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义且有界，定义 $\omega_f(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\omega_f\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)$，求证 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件为 $\omega_f(x_0)=0$.

【证明】 必要性. 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)$，有 $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 于是 $\omega_f(x_0)<2\varepsilon$. 由 ε 的任意性知，$\omega_f(x_0)=0$.

充分性. 若 $\omega_f(x_0)=0$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{|f(x')-f(x'')|\,x',x''\in\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)\right\}=0.$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，当 $\forall n>N$ 有 $\sup\limits_{x',x''\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)}|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立，从而，取 $\delta=\frac{1}{N+1}$，当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 x_0 连续.

【例 4-56】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导函数，求证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【证明】 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由积分中值定理得，$\exists\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

对上述 ξ，$\forall x\in[a,b]$，

$$f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

于是
$$|f(x)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f(x)'|\mathrm{d}x.$$

【例 4-57】 设 $f(x)$在$[a,b]$可积，求证存在连续函数序列 $\varphi_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 将$[a,b]$ n 等分，设分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. 在$[x_{i-1},x_i]$上，令 $\varphi_n(x)$ 为过点$[x_{i-1},f(x_{i-1})]$及$[x_i,f(x_i)]$的直线，即当 $x\in[x_{i-1},x_i]$时，令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

则 $\varphi_n(x)$是$[a,b]$的连续函数. 令 m_i，M_i 及 ω_i 分别表示函数$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$的下确界、上确界及振幅. 则当 $x\in[x_{i-1},x_i]$时，$m_i\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i$，$m_i\leqslant f(x)\leqslant M_i$，从而$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i$. 于是

$$\left|\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|\varphi_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\varphi_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i.$$

由 $f(x)$在$[a,b]$可积知，$\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i\to0\ (n\to\infty)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 4-58】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$黎曼可积，求证：

(1) 存在区间序列$\{[a_n,b_n]\}$使$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\subset(a,b)$，且 $\omega_f([a_n,b_n])<\frac{1}{n}$；

(2) 存在 $c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，使得 $f(x)$ 在 c 点连续；

(3) $f(x)$ 在$[a,b]$有无穷多个连续点.

【证明】 (1) 首先证明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，使得$\omega_f([\alpha,\beta])<\varepsilon$. 用反证法. 假设不然，即$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，有$\omega_f([\alpha,\beta])\geqslant\varepsilon_0$. 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$可积，则对$[a,b]$的任何分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|<\delta$时，有$\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. 与$\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\cdot\sum\limits_{i=1}^n\Delta x_i=(b-a)\varepsilon_0$矛盾.

特别地，取 $\varepsilon_1=1$，则$\exists[a_1,b_1]\subset(a,b)$，且 $b_1-a_1\leqslant\frac{b-a}{2}$，使得

$\omega_f([a_1,b_1])<1$. 取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, 则 $\exists[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$, 且 $b_2-a_2\leqslant\frac{b_1-a_1}{2}$, 使得 $\omega_f([a_2,b_2])<\frac{1}{2}$. 继续下去, 便得到一区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 使 $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\subset(a,b)$, $b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\frac{b_n-a_n}{2}$, 且 $\omega_f([a_n,b_n])<\frac{1}{n}$.

(2) 对 (1) 中构造出的区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 应用闭区间套定理得, $\exists c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 下面证 $f(x)$ 在 c 点连续. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 知, $\exists N\in\mathbf{N}^+$, $\forall n>N$, $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 取 $\delta>0$ 充分小, 使 $(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{N+1},b_{N+1}]$, 于是当 $|x-c|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(c)|<\omega_f([a_{N+1},b_{N+1}])<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall t\in(a,b)$, $\forall\delta>0$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, $f(x)$ 在 $[t-\delta, t+\delta]\cap[a,b]$ 可积. 由(1)和(2)可得, $\exists x_t\in[t-\delta,t+\delta]\cap[a,b]\subset[a,b]$, 使 $f(x)$ 在 x_t 处连续. 于是, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有无穷多个连续点.

第五章　多元函数微分学

§1　多元函数的极限与连续性

一、基本要求

1. 理解平面点集的有关概念和多元函数的概念.

2. 理解二元函数极限的概念，掌握全面极限与累次极限的关系.

3. 理解二元函数的连续性，理解有界闭区域上连续函数的性质(有界性定理、最值定理、一致连续性定理、介值定理).

二、主要概念和结论

1. 邻域　设点 $P_0(x_0, y_0)\in \mathbb{R}^2$，$\delta>0$，称 $\{P(x, y)\in \mathbb{R}^2 \mid r(P, P_0)<\delta\}$ 为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $O(P_0, \delta)$；称 $\{P(x, y)\in \mathbb{R}^2 \mid 0<r(P, P_0)<\delta\}$ 为点 P_0 的 δ 去心邻域，记为 $O^*(P_0, \delta)$；其中 $r(P, P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 为点 $P(x, y)$ 与 $P_0(x_0, y_0)$ 之间的距离.

2. 利用邻域可给出平面上任一点 P_0 与点集 E 的关系.

(1) 若 $\exists\delta>0$ 使得 $O(P_0, \delta)\subset E$，则称 P_0 为 E 的内点.

(2) 若 $\exists\delta>0$ 使得 $O(P_0, \delta)\cap E=\varnothing$，则称 P_0 为 E 的外点.

(3) 若 $\forall\delta>0$ 都有 $O(P_0, \delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $O(P_0, \delta)\setminus E\neq\varnothing$，则称 P_0 为 E 的边界点.

(4) 若 $\forall\delta>0$ 都有 $O^*(P_0, \delta)\cap E\neq\varnothing$，则称 P_0 为 E 的聚点.

点 P_0 只能是 E 的内点、外点和边界点三者之一. E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，E 的边界点和聚点可能属于也可能不属于 E. E 的内点一定是 E 的聚点，E 的外点一定不是 E 的聚点，E 的边界点可能是也可能不是 E 的聚点.

3. 几种重要的平面点集　设 E 是平面点集.

(1) 若 E 中所有的点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

(2) 若 E 中所有的聚点(若有的话)都属于 E，则称 E 为闭集.

(3) 若 E 中的任何两点都能用完全包含在 E 中的由有限条直线段组成的折线连结起来，则称 E 为连通集.

(4) 连通的开集，称为开区域，简称区域.

(5) 区域连同它的边界点所组成的集合称为闭区域.

(6) 若 $\exists M>0$，$P_0\in \mathrm{R}^2$，使得 $E\subset O(P_0, M)$，则称 E 为有界集.

4. 设 $\{P_n(x_n, y_n)\}$ 是平面上的点列，$P_0=(x_0, y_0)$ 是平面上的一点. 若 $\forall \epsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有

$$r(P_n, P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\epsilon,$$

则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 或 $P_n\to P_0(n\to\infty)$.

由点列极限的定义不难看出，下面的三个式子是等价的：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}r(P_n, P_0)=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

5. 设二元函数 $f(P)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个去心邻域有定义，A 是一个确定的实数. 若 $\forall \epsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<r(P, P_0)<\delta$ 时，有 $|f(x, y)-A|<\epsilon$，则称 A 是二元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)=A, \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

上述极限通常称为二重极限. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x, y)$ 存在或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x, y)$ 存在，则称它们为二次极限或累次极限.

6. 设函数 f 在点 P_0 的某个邻域有定义. 若 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 连续.

关于二元函数极限的性质和运算法则，二元连续函数的运算法则，以及有界闭区域上连续函数的性质与一元函数的情况相似.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-1】 设 $\{P_n=(x_n, y_n)\}$ 是平面点列，$P_0=(x_0, y_0)$ 是平面上的点. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

【证明】 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$，则 $\forall \epsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有 $\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\epsilon$，即 $(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2<\epsilon^2$，从而

$|x_n - x_0| < \epsilon$, $|y_n - y_0| < \epsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

充分性. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, 则$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathrm{N}^+$, $\forall n > N$, 同时有$|x_n - x_0| < \epsilon$, $|y_n - y_0| < \epsilon$, 从而$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{2}\epsilon$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

【例 5-2】 设平面点列$\{P_n\}$收敛, 证明$\{P_n\}$有界.

【证明】 不妨设$\{P_n\}$收敛于P_0, 则对于$\epsilon_0 = 1$, $\exists N \in \mathrm{N}^+$, $\forall n > N$, 有$r(P_n, P_0) < \epsilon_0 = 1$. 记$r_i = r(P_i, P_0)$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 令$M = \max\{1, r_1, r_2, \cdots, r_N\}$, 则$\forall n$, 都有$r(P_n, P_0) \leqslant M$, 所以$\{P_n\}$有界.

【例 5-3】 判别下列平面点集哪些是开集、闭集、有界集或区域, 并分别指出它们的聚点:

(1) $E = \{(x, y) | y < x^2\}$;

(2) $E = \{(x, y) | xy \neq 0\}$;

(3) $E = \{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 2, 2y \leqslant x \leqslant 2y + 2\}$;

(4) $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1$ 或 $y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

【解】 (1) E 为开集和区域, E 的聚点全体为$\{(x, y) | y \leqslant x^2\}$.

(2) E 为开集, E 的聚点全体为 R^2.

(3) E 为闭集和有界集, E 的聚点全体为

$$\{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 2, 2y \leqslant x \leqslant 2y + 2\}.$$

(4) E 为闭集和有界集, E 的聚点全体为

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

【例 5-4】 设 F 是闭集, G 是开集, 证明: $F \setminus G$ 是闭集, $G \setminus F$ 是开集.

【证明】 设 R^2 为全集, 记 F^c 和 G^c 分别是 F 和 G 的余集, F' 和 G' 分别是 F 和 G 的所有聚点组成的集合(该集合又称为导集), 则 $F' \subset F$, $G' \cap G \neq \varnothing$, 下面先证 F^c 为开集, G^c 是闭集:

(1) 设 $P_0 \in F^c$, 则$\exists \delta > 0$, 使得 $O(P_0, \delta) \subset F^c$. 这是因为: 假设$\forall \delta > 0$, 都有 $O(P_0, \delta) \cap F \neq \varnothing$, 则 $P_0 \in F' \subset F$, 这和 $P_0 \in F^c$ 相矛盾, 所以$O(P_0, \delta) \subset F^c$. 所以 F^c 为开集.

(2) 设 $P_0 \in (G^c)'$, 则$\forall \delta > 0$, $O(P_0, \delta) \cap G^c \neq \varnothing$, 所以 $P_0 \notin G$, 所以 $P_0 \in G^c$, 即 G^c 是闭集.

下面证明本题结论:

由于 $F \setminus G = F \cap G^c$, $G \setminus F = G \cap F^c$, 所以只需证明 $F \cap G^c$ 为闭集, $G \cap F^c$ 为开集即可.

(3) 记 $E=F\cap G^c$，则 $E\subset F$ 且 $E\subset G^c$，故 $E'\subset F'$ 且 $E'\subset(G^c)'$，而 F 和 G^c 为闭集，所以 $F'\subset F$ 且 $(G^c)'\subset G^c$，即 $E=F'\cap(G^c)'$，所以 $F\cap G^c$ 为闭集.

(4) 设 $M\in G\cap F^c$，则 $M\in G$ 且 $M\in F^c$，而 G 和 F^c 为开集，故 $\exists\,\delta_1>0$，使得 $O(M,\ \delta_1)\subset G$，$\exists\,\delta_2>0$，使得 $O(M,\ \delta_2)\subset F^c$. 记 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则 $O(M,\ \delta)\subset G\cap F^c$，即 $G\cap F^c$ 为开集.

【例 5-5】 设 F_1，F_2 是 R^2 中两个不相交闭集. 证明存在 R^2 上的连续函数 $f(X)$，使

$$f(X)=0,\ X\in F_1,\ f(X)=1,\ X\in F_2.$$

【证明】 $\forall X\in\mathrm{R}^2$，令 $g(X)=\inf\limits_{Y\in F_1}r(X,\ Y)=r(X,\ F_1)$，$h(X)=\inf\limits_{Y\in F_2}r(X,\ Y)=r(X,\ F_2)$. 由于 $F_1\subset\mathrm{R}^2$ 是闭集，故 $g(X)$在 R^2 连续，且 $\exists\,Y_X\in F_1$，使 $g(X)=r(X,\ Y_X)$. 因此 $g(X)$满足 $X\in F_1$，$g(X)=0$，$X\notin F_1$，$g(X)>0$. 同理可证 $h(X)$在 R^2 连续且满足 $X\in F_2$，$h(X)=0$，$X\notin F_2$，$h(X)>0$. 令 $f(X)=\dfrac{g(X)}{g(X)+h(X)}$，则 $f(X)$在 R^2 连续且满足 $X\in F_1$，$f(X)=0$，$x\in F_2$，$f(X)=1$.

【例 5-6】 设 E 是平面点集. 证明 P_0 是 E 的聚点的充要条件是 E 中存在点列 $\{P_n\}$，满足 $P_n\neq P_0(n=1,\ 2,\ \cdots)$且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

【证明】 必要性. 设 P_0 为 E 的聚点，则 $\forall\,\delta>0$，有 $O^*(P_0,\ \delta)\cap E\neq\varnothing$. 令 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，则 $O^*(P_0,\ \delta_n)\cap E\neq\varnothing$，任取一点 $P_n\in O^*(P_0,\ \delta_n)\cap E$，其中 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$. 可以得到一点列 $\{P_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$，则 $\forall\,\delta>0$，$\exists\,N\in\mathrm{N}^+$，$\forall\,n>N$，有 $P_n\in O^*(P_0,\ \delta)$，即 $O^*(P_0,\ \delta)\cap E\neq\varnothing$，所以 P_0 是 E 的聚点.

【例 5-7】 用平面上的有限覆盖定理证明致密性原理.

【证明】 用反证法. 假设有界点列 $\{P_n\}$ 没有收敛的子列，则存在有界闭集 E，使得 $\{P_n\}\subset E$，但是 $\forall\,P\in E$，$\exists\,\delta_P>0$，使得 $O(P,\ \delta_P)$中只有 $\{P_n\}$ 中有限个点. 记 $\zeta=\{O(P,\ \delta_P)\,|\,P\in E\}$，则 ζ 是 E 的一个覆盖. 由有限覆盖定理，存在 ζ 中有限个开集覆盖了 E，设这有限个开集为：

$$G_1=O(P'_1,\ \delta_1),\ G_2=O(P'_2,\ \delta_2),\ \cdots,\ G_K=O(P'_K,\ \delta_K),$$

则 $\bigcup\limits_{i=1}^{K}G_i$ 必包含了 $\{P_n\}$ 中所有的点. 与每一个 G_i 中只包含了 $\{P_n\}$ 中的有限个点矛盾. 所以有界点列必有收敛的子列.

【例 5-8】 用致密性定理证明柯西收敛定理.

【证明】 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathrm{N}^+$, 当 n, $m>N$ 时, 有 $r(P_n, P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$, $r(P_m, P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$, 所以

$$r(P_n, P_m)\leqslant r(P_n, P_0)+r(P_m, P_0)<\varepsilon.$$

充分性. 取 $\varepsilon_0=1$, $\exists N_1\in \mathrm{N}^+$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $r(P_n, P_{N_1+1})<1$, 所以, 当 $n>N_1$ 时,

$$r(P_n, P_0)\leqslant r(P_n, P_{N_1+1})+r(P_{N_1+1}, P_0)<1+r(P_{N_1+1}, P_0),$$

即 $\{P_n\}$ 有界. 由致密性定理可知 $\{P_n\}$ 有收敛的子列 $\{P_{n_k}\}$. 不妨设 $P_{n_k}\to P_0(k\to\infty)$, 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists K\in \mathrm{N}^+$, 当 $k>K$ 时, 有 $r(P_{n_k}, P_0)<\varepsilon$, 取 $N_2=\max\{N_1, K\}$, 则当 $m>N_2$ 时, 因为 $n_{N_2+1}>N_2\geqslant N_1$, 且 $N_2+1>K$, 所以 $r(P_m, P_0)\leqslant r(P_m, P_{n_{N_2+1}})+r(P_{n_{N_2+1}}, P_0)<2\varepsilon$, 所以 $\{P_n\}$ 是收敛的.

【例 5-9】 设 E 是平面点集, 如果集合 E 的任一覆盖都有有限子覆盖, 则称 E 是紧集. 证明紧集是有界闭集.

【证明】 设 E 是紧集. 令 $\zeta=\{O(P, 1)\mid P\in E\}$, 则 ζ 是 E 的一个覆盖. 从而存在 ζ 中的有限个开集覆盖了 E, 不妨设这有限个开集为 $G_i=O(P_i, 1)$, $P_i\in E$, $i=1, 2, 3, \cdots, K$, 则 $E\subset \bigcup\limits_{i=1}^{K} G_i$. 由于每一个 G_i 有界, 所以 E 也是有界的. 设 $P_0 \notin E$, 下面证 P_0 不是 E 的聚点. 设 $\zeta=\left\{O\left(P, \frac{1}{2}r(P_0, P)\right)\,\middle|\, P\in E\right\}$, 则 ζ 覆盖了 E. 从而存在 ζ 中的有限个开集覆盖了 E, 不妨设这有限个开集为: $G_j=O\left(P_j, \frac{1}{2}r(I_0, P_j)\right)$, $P_j\in E$, 其中 $j=1, 2, 3, \cdots, K$. 记 $\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant K}\left\{\frac{1}{2}r(P_0, P_j)\right\}$, 则 $O(P_0, \delta)\cap(\bigcup\limits_{j=1}^{K} G_j)=\varnothing$, 所以 $O(P_0, \delta)\cap E=\varnothing$, 即 P_0 不是 E 的聚点.

【例 5-10】 叙述下列定义:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\infty$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} f(x, y)=A$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x, y)=A$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x, y)=\infty$.

【解】 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\infty\Leftrightarrow \forall G>0$, $\exists \delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x, y)|>G$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to-\infty}} f(x, y)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists Z>0$，使当 $x>Z$，$y<-Z$ 时，有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to+\infty}} f(x, y)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$\exists Y>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$，$y>Y$ 时，有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to+\infty}} f(x, y)=\infty \Leftrightarrow \forall G>0$，$\exists \delta>0$，$\exists Y>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$，$y>Y$ 时，有 $|f(x, y)|>G$.

【例 5-11】 求下列极限(包括非正常极限)：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$；　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$；

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$；　　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

【解】 (1) $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant|x|+|y|$，$0\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$，故原式$=0$.

(2) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$原式=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}=\lim_{r\to0}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$$

(3) $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}{(1+x^2+y^2)-1}=\sqrt{1+x^2+y^2}+1$，

$$原式=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{1+x^2+y^2}+1=2.$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)=0$，$\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$有界，故原式$=0$.

(5) $x^2y^2\ln(x^2+y^2)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to0}t\ln t=0$，故原式$=0$.

(6) $0 \leqslant \frac{x^2 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 y \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4+y^2}{x^4+y^2} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}}$，而$\lim\limits_{y \to 0} y^{\frac{1}{2}} = 0$，故原式$=0$.

(7) 令 $t = x^2+y^2$，则原式$= \lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-t} = 0$.

(8) $0 \leqslant \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$，而 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$，故原式$=0$.

【例 5-12】 讨论下列函数在(0, 0)点的全面极限和两个累次极限：

(1) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$；

(2) $f(x, y) = (x+y)\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$；

(3) $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$，$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0$.

令 $y = kx$，则$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1}{1+k^2}$，即沿着不同斜率的直线趋于(0, 0)的极限也不同；从而$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$不存在.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$和$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$不存在. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x+y) = 0$，而 $\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$是有界函数，所以$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x+y)\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \infty$. 令 $y = kx$，则$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^x - e^y}{xy} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{kx}}{kx^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - k^2 e^{kx}}{2k} = \frac{1-k^2}{2k}$，从而$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)}$不存在.

【例 5-13】 叙述并证明二元函数极限的局部有界性定理和局部保号性定理.

【证明】 (1)局部有界性定理　若$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$，则$\exists \delta > 0$，使得$f(P)$在$O^*(P_0, \delta)$有界. 证明如下：

由$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$，对于 $\varepsilon_0 = 1$，$\exists \delta > 0$，当 $P \in O^*(P_0, \delta)$时，有$|f(P) - A| < 1$，即$|f(P)| \leqslant |f(P) - A| + |A| < 1 + |A|$，所以 $f(P)$在$O^*(P_0, \delta)$有界.

(2) 局部保号性定理　若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A>0$（或 $A<0$），则 $\exists\,\delta>0$，使得 $f(P)$ 在 $O^*(P_0,\ \delta)$ 有 $f(P)>\dfrac{A}{2}\left(\text{或 } f(P)<\dfrac{A}{2}\right)$．证明如下：

由 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A>0$，对于 $\varepsilon_0=\dfrac{A}{2}>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $P\in O^*(P_0,\ \delta)$ 时，有 $|f(P)-A|<\dfrac{A}{2}$，即 $f(P)>A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}$．类似可证 $A<0$ 的情况．

【例 5-14】　叙述并证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$ 存在的柯西收敛原理．

【证明】　柯西收敛原理　$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\,P'$，$P''\in O(P_0,\ \delta)$，有 $|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$．证明如下：

必要性．设 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 P'，$P''\in O^*(P_0,\ \delta)$ 时，有 $|f(P')-f(P_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $|f(P'')-f(P_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立，故

$$|f(P')-f(P'')|\leqslant|f(P')-f(P_0)|+|f(P'')-f(P_0)|<\varepsilon.$$

充分性．在 f 的定义域内任取一收敛于 P_0 的点列 $\{P_n\}$，且 $P_n\neq P_0$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，则 $\exists\,N\in\mathrm{N}^+$，$\forall\,n>N$，有 $P_n\in O^*(P_0,\ \delta)$，所以，$\forall\,n$，$m>N$，有 $|f(P_n)-f(P_m)|<\varepsilon$．由点列的柯西收敛原理知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ 存在．再由 $\{P_n\}$ 的任意性可知，$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在．

【例 5-15】　讨论下列函数的连续范围：

(1) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$；

(2) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

(3) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ $(p>0)$．

【解】　(1) 当 $x_0\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=x_0\neq f(x_0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,\ 0)$，故 $f(x,\ y)$ 的连续范围为 $\{(x,\ y)\,|\,x\neq 0\}\cup\{(0,\ 0)\}$．

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)$，故 $f(x,\ y)$ 的连续范围为其定义域 R^2．

(3) 当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时，连续范围为 $\mathbf{R}^2$；当 $p\geqslant\frac{1}{2}$ 时，连续范围为 $\{(x, y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$.

【例 5-16】 若 $f(x, y)$ 在某区域 G 内对变量 x 连续，对变量 y 满足李普希兹条件，即对 $\forall(x, y')\in G$ 和 $(x, y'')\in G$，有 $|f(x, y')-f(x, y'')|\leqslant L|y'-y''|$，其中 L 为常数，求证 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

【证明】 $\forall(x_0, y_0)\in G$，由 $f(x, y)$ 在 G 内对 x 连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，当 $(x, y_0)\in G$，且 $|x-x_0|<\delta'$ 时，有 $|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足李普希兹条件，则 $\forall(x, y)\in G$ 和 $(x, y_0)\in G$，当 $|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2L}$ 时，有 $|f(x, y)-f(x, y_0)|\leqslant L|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\left\{\delta', \frac{\varepsilon}{2L}\right\}$，则 $\forall(x, y)\in G$，当 $|x-x_0|<\delta$，且 $|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

【例 5-17】 证明有界闭集上二元连续函数的最值定理和一致连续性定理.

【证明】 (1) 最值定理：若二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭集 E 连续，则 $f(x, y)$ 在 E 能取到最大值和最小值. 证明如下：

因为 $f(x, y)$ 在 E 连续，所以 $f(x, y)$ 在 E 有界. 由确界存在定理，$f(x, y)$ 在 E 有上确界和下确界，分别记为 β 和 α. 下面证明 $f(x, y)$ 在 E 可以达到上确界 β 和下确界 α.

由上确界的定义，对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，$\exists P_n(x_n, y_n)\in E$，使得 $\beta-\varepsilon_n<f(P_n)\leqslant\beta$，其中 $n=1, 2, \cdots$. 由此得到点列 $\{P_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=\beta$. 由 E 有界，知 $\{P_n\}$ 有界. 由致密性定理，$\{P_n\}$ 有收敛的子列，不妨设 $\{P_n\}$ 收敛，设 $P_n\to P_0(n\to\infty)$，则 $P_0\in E$. 再考虑到 $f(x, y)$ 在 E 连续，故 $f(x, y)$ 在 P_0 点也连续，所以 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=f(P_0)$. 由极限的惟一性知，$\beta=f(P_0)$.

同理可证 $f(x, y)$ 在 E 可以达到下确界.

(2) 一致连续性定理：若二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭集 E 连续，则 $f(x, y)$ 在 E 一致连续. 证明如下：

用反证法. 假设 $f(x, y)$ 在 E 非一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\eta>0$，$\exists P'(x', y')\in E$，$P''(x'', y'')\in E$，$|x'-x''|<\eta$，$|y'-y''|<\eta$，

$|f(P')-f(P'')|\geqslant\varepsilon_0$. 特别，取 $\eta_n=\frac{1}{n}$，则得 $P'_n(x'_n, y'_n)\in E$ 和 $P''_n(x''_n, y''_n)\in E$，$|x'_n-x''_n|<\eta$，$|y'_n-y''_n|<\eta$，$|f(P'_n)-f(P''_n)|\geqslant\varepsilon_0$，其中 $n=1, 2, \cdots$，由此可以得到有界闭集 E 中的两个点列 $\{P'_n\}$ 和 $\{P''_n\}$. 由致密性定理，有界点列 $\{P'_n\}$ 存在收敛的子列，不妨设 $\{P'_n\}$ 收敛，设 $P'_n\to P_0(n\to\infty)$，则 $P_0\in E$，且 $P''_n\to P_0(n\to\infty)$. 由于 $f(x, y)$ 在 E 连续，所以 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P'_n)=f(P_0)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P''_n)=f(P_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(P'_n)-f(P''_n)]=0$，与 $|f(P'_n)-f(P''_n)|\geqslant\varepsilon_0(n=1, 2, \cdots)$ 矛盾. 所以 $f(x, y)$ 在 E 一致连续.

【例 5-18】 设二元函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续，$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x, y)=A$，求证：

(1) $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 有界； (2) $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 一致连续.

【证明】 (1) 由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x, y)=A$ 知，对于 $\varepsilon_0=1$，$\exists X>0$，当 $x^2+y^2>X$ 时，有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon_0=1$，从而 $|f(x, y)|<1+|A|$. 又 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续，所以 $f(x, y)$ 在有界闭集 $E=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant X\}$ 连续，由有界性定理知，$f(x, y)$ 在 E 有界，即 $\exists M_0>0$，$\forall(x, y)\in E$，$|f(x, y)|\leqslant M_0$. 取 $M=\max\{M_0, 1+|A|\}$，则 $\forall(x, y)\in\mathbf{R}^2$，都有 $|f(x, y)|\leqslant M$，即 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 有界.

(2) 由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x, y)=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x'^2+y'^2>X$，$x''^2+y''^2>X$ 时，有 $|f(x', y')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'', y'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立. 从而 $|f(x', y')-f(x'', y'')|\leqslant|f(x', y')-A|+|f(x'', y'')-A|<\varepsilon$. 又因为 $f(x, y)$ 在 $G=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant X+1\}$ 连续，所以 $f(x, y)$ 在 G 一致连续. 从而对上述 ε，$\exists\delta_0>0$，$\forall P_1, P_2\in G$，当 $r(P_1, P_2)<\delta_0$ 时，有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{1, \delta_0\}$，则 $\forall P_1\in\mathbf{R}^2$ 和 $P_2\in\mathbf{R}^2$，当 $r(P_1, P_2)<\delta$ 时，有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$，即 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 一致连续.

【例 5-19】 证明若 $f(x, y)$ 分别对每一变量 x 和 y 是连续的，并且对其中的一个是单调的，则 $f(x, y)$ 是二元连续函数.

【证明】 不妨设 $f(x, y)$ 关于 x 单调. 任取 $(x_0, y_0)\in G$，其中 G 为 $f(x, y)$ 的定义域. 由 $f(x, y)$ 关于 x 连续知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|x-x_0|<2\delta_1$ 时，有 $|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $|f(x_0\pm\delta_1, y_0)-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $x=x_0-\delta_1$, $x_0+\delta_1$，因为 $f(x, y)$

关于 y 连续，所以对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，同时有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，利用 $f(x,y)$ 关于 x 的单调性，有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant\max\{|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|\}\\&\leqslant|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|+|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\varepsilon\end{aligned}$$

由 (x_0,y_0) 的任意性知，$f(x,y)$ 是连续函数.

【例 5-20】 证明若 E 是有界闭域，$f(x,y)$ 是 E 上的连续函数，则 $f(E)$ 是闭区间.

【证明】 因为 $f(x,y)$ 在 E 连续，所以 $f(x,y)$ 在 E 能达到最小值和最大值，分别设为 $\alpha=f(P')$ 和 $\beta=f(P'')$，其中 P'，$P''\in E$. 若 $\alpha=\beta$，则 $f(E)$ 为一常数. 若 $\alpha\neq\beta$，则 $\alpha<\beta$. 由介值定理，$\forall c\in(\alpha,\beta)$，$\exists P_0\in E$，使得 $f(P_0)=c$，即 $f(x,y)$ 在 E 可以达到 $[\alpha,\beta]$ 之间的任意值，所以 $f(E)$ 为闭区间.

§2 偏导数与全微分

一、基本要求

1. 理解二元函数偏导数和全微分的概念，掌握二元函数连续、可微、偏导数存在、偏导数连续之间的关系.

2. 掌握多元复合函数偏导数、隐函数的偏导数的求法.

3. 理解方向导数和梯度的概念，并掌握其计算方法.

二、主要概念和结论

1. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数或偏微商，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0);$$

类似地，可定义 f 在点(x_0, y_0)关于 y 的偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$或$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$或$f_y(x_0, y_0)$.

和一元函数类似，若函数 $z=f(x, y)$在区域 G 内每一个点处都存在对 x(或对 y)的偏导数，则这个偏导数也是定义在 G 的二元函数，称为偏导函数，简称偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \text{或 } f_x(x, y) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{或 } f_y(x, y)\right).$$

2. 高阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f_{yx}(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

若二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$在区域 G 连续，则在 G 内有$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3. 设函数 $u=f(x, y)$, $x=\varphi(s, t)$, $y=\Psi(s, t)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}(\text{链式法则}).$$

4. 设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某个邻域有定义. 若函数在点 P_0 的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$可以表示为

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho),$$

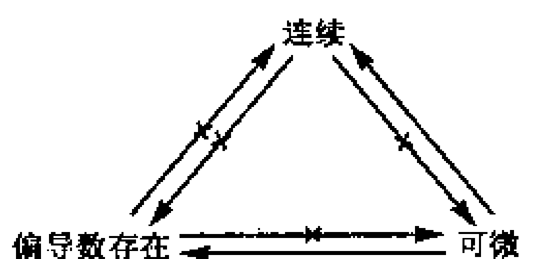
其中 A 和 B 与 Δx 和 Δy 无关，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，则称函数 f 在点 P_0 可微. 并称 $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的全微分，记为$\mathrm{d}z|_{P_0}=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$.

5. 全微分、偏导数和连续之间的关系

(1) 若函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$可微，则(ⅰ)函数 f 在 $P_0(x_0, y_0)$点连续；(ⅱ)函数 f 在点$P_0(x_0, y_0)$的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$和 $f_y(x_0, y_0)$存在，且在 $P_0(x_0, y_0)$点的全微分$\mathrm{d}z|_{P_0}=f_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y$.

(2)若函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某邻域内存在偏导数，且 $f_x(x, y)$和 $f_y(x, y)$在点 P_0 连续，则 f 在点P_0 可微.

6. 方向导数与梯度



(1) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的某个邻域内有定义，l 为始于 P_0 点的任一条射线，$P(x, y, z)\in l$. 若 $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{r(P, P_0)}$ 存在，则称该极限值为函数 f 在 P_0 点沿 l 方向的方向导数，记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 或 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l}$.

(2) 若函数 $f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点可微，则 f 在点 P_0 沿任何方向 l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是 l 的方向余弦.

(3) 设函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微，则 f 在点 P_0 的梯度为 $\mathbf{grad}f(x, y, z)=\{f_x, f_y, f_z\}\big|_{P_0}$. 梯度方向是函数在点 P_0 处函数值增长最快的方向.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-21】 求下列函数的偏导数：

(1) $u=xye^{\sin(xy)}$；　　　　(2) $u=x^y+y^x$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=ye^{\sin(xy)}[1+xy\cos(xy)]$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^{\sin(xy)}[1+xy\cos(xy)]$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}+y^x\ln y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x+xy^{x-1}$.

【例 5-22】 设 $f(x, y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，考察函数在(0, 0)点的偏导数.

【解】 $f_x(0, 0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$；

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0, 0+\Delta y)-f(0, 0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y\sin\dfrac{1}{\Delta y^2}}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta y^2}$ 不存在，所以

$f_y(0, 0)$不存在.

【例 5-23】 证明函数 $u=\sqrt{x^2+y^2}$在(0, 0)点连续但偏导数不存在.

【证明】 由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=u(0,0)$知, u 在(0, 0)点连续. 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}$不存在, 所以 $u_x(0, 0)$不存在. 同理, $u_y(0, 0)$也不存在.

【例 5-24】 考察函数 $f(x, y)$在(0, 0)点的可微性, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

【证明】 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, $f_y(0, 0)=0$. 由全微分的定义知, $f(x, y)$在(0, 0)点可微$\Leftrightarrow f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$是 ρ 的高阶无穷小. 而

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=0,$$

故 $f(x, y)$在(0, 0)点可微.

【例 5-25】 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0, 0)点连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

【证明】 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=0=f(0,0)$, 所以 $f(x, y)$在(0, 0)点连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\text{ 同理, } f_y(0,0)=0.$$

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$ 令 $\Delta y=k\Delta x$, 则$\lim\limits_{\rho\to0}\left(\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\Big/\rho\right)=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{k\Delta x^3}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\Delta x^3}=\dfrac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$, 所以$\lim\limits_{\rho\to0}\left(\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\Big/\rho\right)$不存在, 故 $f(x, y)$在(0, 0)点不可微.

【例 5-26】 证明函数

$$f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导数存在，但偏导数在(0, 0)点不连续，在(0, 0)点的任何邻域中无界，而 f 在(0, 0)点可微.

【证明】 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x(x, y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

$$f_y(x, y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，$f_x(0, 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$；同理 $f_y(0, 0)=0$. 故

$$f_x(x, y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

$$f_y(x, y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

构造一点列 $\left\{P_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right)\right\}$，则 $\forall\,\delta>0$，$\exists\,N\in\mathrm{N}^+$，$\forall\,n>N$，有 $r(P_n, O)<\delta$，且 $\lim\limits_{P_n\to 0}f_x(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f_x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right)=-2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n\pi}=-\infty$，故 $f_x(x, y)$ 在(0, 0)点的任何邻域中无界. 同理，$f_y(x, y)$ 在(0, 0)点的任何邻域中也无界. 当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，$f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 的极限不存在，从而 $f(x, y)$ 的偏导数在(0, 0)点不连续.

由 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x, \Delta y)-f(0, 0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$，知 $f(x, y)$ 在(0, 0)点可微，且 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y=0$.

注 此例表明，对各变量的偏导数存在且连续是可微的充分条件，而不是充要条件.

【例 5-27】 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. 证明 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在(0, 0)连续.

【证明】 当$(x, y)\neq(0, 0)$时，$f_x(x, y)=\dfrac{2xy^2(x^2+y^2)-2x\cdot x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$，而 $f_x(0, 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0$. 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=2\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^5\cos\theta\sin^4\theta}{r^4}=0=f_x(0, 0)$，故$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$(0, 0)$连续. 同理可证，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(0, 0)$也连续.

【例 5-28】 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

(1) $x=x(t)$，$y=y(t)$是通过原点的任意可微曲线(即 $x^2(0)+y^2(0)=0$; $t\neq 0$ 时，$x^2(t)+y^2(t)\neq 0$，$x(t)$，$y(t)$可微). 求证 $f(x(t), y(t))$可微.

(2) $f(x, y)$在$(0, 0)$不可微.

【证明】 (1) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{3x^2y^2+4x^4}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$，由链式法则，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f(x(t), y(t))$可微，且

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{3x^2y^2+4x^4}{(x^2+y^2)^2}\cdot x'(t)+\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}y'(t).$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，令 $g(t)=f(x(t), y(t))=\begin{cases}\dfrac{x^3(t)}{x^2(t)+y^2(t)}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$.

由于$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(t)-x(0)}{t-0}=x'(0)$，所以

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{x^3(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big/t\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{t}\cdot\frac{x^2(t)/t^2}{x^2(t)/t^2+y^2(t)/t^2}=\frac{x'^3(0)}{x'^2(0)+y'^2(0)}.$$

所以 $f(x(t), y(t))$在所有点都可微.

(2)因为$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x, \Delta y)-f(0, 0)-f_x(0, 0)\Delta x-f_y(0, 0)\Delta y}{\rho}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{-\Delta x\Delta y^2}{\sqrt[3]{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

不存在，所以 $f(x, y)$在$(0, 0)$不可微.

【例 5-29】 设$|x|$，$|y|$很小，利用全微分推出$(1+x)^m(1+y)^n$ 的近似公式.

【解】 设 $f(x, y)=(1+x)^m(1+y)^n$，则 $f_x(x, 0)=m(1+x)^{m-1}$，$f_x(0, 0)=m$，$f_y(0, y)=n(1+y)^{n-1}$，$f_y(0, 0)=n$，所以

$$f(x, y)\approx f(0, 0)+f_x(0, 0)\cdot x+f_y(0, 0)\cdot y=1+mx+ny.$$

【例 5-30】 设 $u=f(x, y)$在矩形：$a<x<b$，$c<y<d$ 内可微，且全微分 $\mathrm{d}u$ 恒为零，问 $f(x, y)$在该矩形内是否应该取常数？证明你的结论.

【解】 是. 因为 $\mathrm{d}u=0$，所以 $\mathrm{d}u=f_x(x, y)\mathrm{d}x+f_y(x, y)\mathrm{d}y=0$，即 $f_x(x, y)=0$，$f_y(x, y)=0$，而由 $f_x(x, y)=0\Rightarrow f(x, y)=g(y)$，$f_y(x, y)=0\Rightarrow g'(y)=0$，从而，$g(y)=C$，所以 $f(x, y)=C$(常数).

【例 5-31】 求下列函数指定阶的偏导数：

(1) $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$，求$\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$；

(2) $u=\dfrac{x+y}{x-y}$ $(x\neq y)$，求$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$.

【解】 (1) $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}=(x\mathrm{e}^x)(y\mathrm{e}^y)(z\mathrm{e}^z)$，而$(t\mathrm{e}^t)^{(k)}=(t+k)\mathrm{e}^t$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}&=(x+p)\mathrm{e}^x\cdot(y+q)\mathrm{e}^y\cdot(z+r)\mathrm{e}^z\\&=(x+p)(y+q)(z+r)\mathrm{e}^{x+y+z}.\end{aligned}$$

(2) $u=\dfrac{x+y}{x-y}=1+\dfrac{2y}{x-y}$，而$\left(\dfrac{1}{t^l}\right)^{(k)}=(-1)^k\dfrac{l(l+1)(l+2)\cdots(l+k-1)}{t^{l+k}}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}&=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(2y\frac{(-1)^m\cdot m!}{(x-y)^{m+1}}\right)\\&=\mathrm{C}_n^0(2y)\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{(-1)^m\cdot m!}{(x-y)^{m+1}}\right)+\mathrm{C}_n^1\cdot 2\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\frac{(-1)^m\cdot m!}{(x-y)^{m+1}}\right)\\&=2(-1)^m m!\ y\left(\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{(x-y)^{m+n+1}}\right)+\\&\quad 2(-1)^m n\cdot m!\ \left(\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right)\\&=\frac{2(-1)^m(m+n-1)!\ (my+nx)}{(x-y)^{m+n+1}}.\end{aligned}$$

【例 5-32】 验证函数 $u=\ln(x^2+y^2)$满足$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

【证明】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

所以$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

【例 5-33】 设函数 $u=\varphi(x+\phi(y))$，证明$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【证明】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+\phi(y))$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\phi'(y)\varphi''(x+\phi(y))$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+\phi(y))\phi'(y)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+\phi(y))$，所以，

$$\text{左端}=\varphi'(x+\phi(y))\phi'(y)\varphi''(x+\phi(y))=\text{右端}.$$

【例 5-34】 求下列函数的所有二阶偏导数：

(1) $u=f(x+y,\ x-y)$；　　(2) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{z}\right)$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1-f_2$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{11}-f_{12}-f_{21}+f_{22}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{11}-f_{12}+f_{21}-f_{22}$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f_1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f_1+\dfrac{1}{z}f_2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}f_2$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y^2}f_{11}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}f_1+\dfrac{x^2}{y^4}f_{11}-\dfrac{x}{y^2z}f_{12}-\dfrac{x}{zy^2}f_{21}+\dfrac{1}{z^2}f_{22}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2y}{z^3}f_2+\dfrac{y^2}{z^4}f_{22}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}f_1-\dfrac{x}{y^3}f_{11}+\dfrac{1}{yz}f_{12}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}$

f_{12}，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=+\dfrac{x}{yz^2}f_{12}-\dfrac{1}{z^2}f_2-\dfrac{y}{z^3}f_{22}$.

【例 5-35】 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 是可微函数，验证$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2xyf'}{f^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f+2y^2f'}{f^2}$.

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{-2xyf'}{f^2}+\frac{1}{y}\cdot\frac{f+2y^2f'}{f^2}=\frac{1}{yf}=\frac{z}{y^2}.$$

【例 5-36】 设 $v=\dfrac{1}{r}g\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$，$c$ 为常数，函数二阶可导，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

【解】 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{1}{r}g''$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}g-\dfrac{x}{cr^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{r^2-3x^2}{r^5}g+\frac{3x^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{x^2}{c^2r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{r^2-3y^2}{r^5}g+\frac{3y^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{y^2}{c^2r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\frac{r^2-3z^2}{r^5}g+\frac{3z^2-r^2}{cr^4}g'+\frac{z^2}{c^2r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\frac{3r^2-3r^2}{r^5}g+\frac{3r^2-3r^2}{cr^4}g'+\frac{r^2}{c^2r^3}g''=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

【例 5-37】 若函数 $f(x, y, z)$对任一正实数 t 满足关系$f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$，则称 $f(x, y, z)$为 n 次齐次函数. 设 $f(x, y, z)$可微，试证明 $f(x, y, z)$为 n 次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x, y, z).$$

【证明】 必要性. 对 $f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$两边关于 t 求导，得 $xf'_1(tx, ty, tz)+yf'_2(tx, ty, tz)+zf'_3(tx, ty, tz)=nt^{n-1}f(x, y, z)$，两边乘以 t，得

$$\begin{aligned}&txf'_1(tx, ty, tz)+tyf'_2(tx, ty, tz)+tzf'_3(tx, ty, tz)\\&=nt^n f(x, y, z)=nf(tx, ty, tz),\end{aligned}$$

即

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x, y, z).$$

充分性. 当 $t\neq 0$ 时，构造函数 $F(t)=\dfrac{f(tx, ty, tz)}{t^n}$. 易知

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}(xf'_1+yf'_2+zf'_3)-\frac{n}{t^{n+1}}f=\frac{1}{t^{n+1}}(txf_1+tyf_2+tzf_3-nf)=0.$$

故 $F(t)=C$(常数). 又 $F(1)=f(x, y, z)=C$，故

$$f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z).$$

由已知 $f(0, 0, 0)=0$，所以当 $t=0$ 时结论成立.

【例 5-38】 验证下列各式：

(1) $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

(2) $u=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\Psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，则 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi+x\varphi'+y\Psi'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+x\varphi''+\Psi'+y\Psi''$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+x\varphi''+y\Psi''$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\Psi'+y\Psi''+x\varphi''$，故$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\varphi'+x\varphi''+y\Psi''-2\varphi'-2x\varphi''-2\Psi'-2y\Psi''+2\Psi'+y\Psi''+x\varphi''=0$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi+x\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\Psi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\varphi-\frac{y}{x^2}(x\varphi'+\Psi')$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}\varphi''+\frac{2y}{x^3}\Psi'+\frac{y^2}{x^4}\Psi''$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}\Psi'-\frac{y}{x^2}\varphi''-\frac{y}{x^3}\Psi''$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'+\frac{1}{x}\Psi'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\Psi''+\frac{1}{x}\varphi''$,

故 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x^3}\varphi''+\frac{2y}{x^3}\Psi'+\frac{y^2}{x^4}\Psi''-2xy\left(\frac{1}{x^2}\Psi'+\frac{y}{x^2}\varphi''+\frac{y}{x^3}\Psi''\right)+\frac{1}{x^2}\Psi''+\frac{1}{x}\varphi''=0$.

【例 5-39】 设 $u=f(x,y)$可微，在极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 下证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial r}=f_x\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+f_y\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$,

$\frac{\partial u}{\partial \theta}=rf_y\cos\theta-rf_x\sin\theta$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=f_{xx}\cos^2\theta+f_{yy}\sin^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2f_{xx}\sin^2\theta-2rf_{xy}\sin\theta\cos\theta+r^2f_{yy}\cos^2\theta-rf_x\cos\theta-rf_y\sin\theta$.

故

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2&=f_x^2\cos^2\theta+2f_xf_y\cos\theta\sin\theta+f_y^2\sin^2\theta+\\&\quad\frac{1}{r^2}(r^2f_y^2\cos^2\theta-2rf_xf_y\cos\theta\sin\theta+r^2f_x^2\sin^2\theta)\\&=f_x^2+f_y^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}&=f_{xx}\cos^2\theta+f_{yy}\sin^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+\\&\quad\frac{1}{r}(rf_y\cos\theta-rf_x\sin\theta)+\frac{1}{r^2}(r^2f_{xx}\sin^2\theta-\\&\quad 2rf_{xy}\sin\theta\cos\theta+r^2f_{yy}\cos^2\theta-rf_x\cos\theta-rf_y\sin\theta)\\&=f_{xx}+f_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

【例 5-40】 设 $z=f(x,y)$可微，在坐标旋转变换 $x=u\cos\theta-v\sin\theta$，$y=$

$u\sin\theta+v\cos\theta$ 下(其中旋转角 θ 为常数), 证明: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$. 这时称$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$是一个形式不变量.

【证明】 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta$, 故

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

【例 5-41】 设函数 $u=f(x,y)$满足拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 证明在下列变换下保持不变, 即仍有$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$.

(1) $x=e^s\cos t$, $y=e^s\sin t$;

(2) $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$满足$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial s}$, 这组方程称为柯西-黎曼方程.

【证明】 (1) $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\cos^2 t+\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\sin^2 t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{2s}\sin 2t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}e^s(-\sin t)+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\cos t,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\sin^2 t+\frac{\partial u}{\partial x}e^s(-\cos t)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\cos^2 t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s(-\sin t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{2s}\sin 2t,$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

(2)
$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial s},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

故 $$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)+$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2\right]+$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)=0.$$

【例 5-42】 作自变量的变换，取 ξ，η，ζ 为新的自变量：

(1) $\xi=x$，$\eta=x^2+y^2$，变换方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$；

(2) $\xi=x$，$\eta=y-x$，$\zeta=z-x$，变换方程$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+2x\frac{\partial z}{\partial\eta}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial\eta}$，代入原方程，得

$$y\frac{\partial z}{\partial\xi}+2xy\frac{\partial z}{\partial\eta}-2xy\frac{\partial z}{\partial\eta}=0,\qquad \text{即}\frac{\partial z}{\partial\xi}=0.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\zeta}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\eta}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\zeta}$，$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$，故变换后的方程为$\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$.

【例 5-43】 设 $u=\frac{x}{y}$，$v=x$，$w=xz-y$，变换方程 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$. 其中 u，v 为新的自变量，$w=w(u,v)$为新的因变量.

【解】 对 $w=xz-y$ 两边关于 y 求导，其中 $w=w(u,v)$，得 $\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}-1$. 由$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 知，$\frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x\frac{\partial z}{\partial y}-1$，从而$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}$.

再对$\frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x\frac{\partial z}{\partial y}-1$ 两边关于 y 求导，得

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2x}{y^3}=x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{x}{y^4}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

故 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}$，即$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

【例 5-44】 求由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶和二阶偏导数.

【解】 方程两边分别对 x 和 y 求偏导，得

$$-ye^{-xy}-2\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad -xe^{-xy}-2\frac{\partial z}{\partial y}+e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

将所得的第一个方程两边再分别对 x 和 y 求偏导，得

$$y^2e^{-xy}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-e^{-xy}+xye^{-xy}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

解得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2e^{-xy}(e^{2z}-4e^z+e^{z-xy}+4)}{-(e^z-2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^{-xy}(1-xy)(e^z-2)^2-xye^{z-2xy}}{(e^z-2)^3}.$$

将所得的第二个方程两边再对 y 求导，得

$$x^2e^{-xy}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+e^z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2e^{-xy}(e^{2z}-4e^z+e^{z-xy}+4)}{-(e^z-2)^3}.$$

【例 5-45】 求下列方程所确定的全微分 dz：

(1) $z=f(xz,\ z-y)$； (2) $f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

【解】 (1) 两边分别对 x 和 y 求偏导得，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f'_1+\frac{\partial z}{\partial x}f'_2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}f'_1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)f'_2.$$

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{zf'_1}{1-xf'_1-f'_2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-f'_2}{1-xf'_1-f'_2}$. 故

$$dz=\frac{zf'_1dx-f'_2dy}{1-xf'_1-f'_2}.$$

(2) 两边对 x 求偏导得，$f'_1\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+f'_2\left(2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f'_1+2xf'_2}{f'_1+2zf'_2}$.同理，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f'_1+2yf'_2}{f'_1+2zf'_2}$. 故

$$dz=\frac{f'_1\cdot(dx+dy)+2f'_2\cdot(xdx+ydy)}{f'_1+2zf'_2}.$$

【例 5-46】 设 $z=z(x,\ y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$所确定，其中 f 为可导函数. 证明$(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

【证明】 对 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导得，$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}f'$，$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f+y\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}\right)f'$. 解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'-2z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-f+\frac{z}{y}f'}{f'-2z}$. 再由 $f=\frac{x^2+y^2+z^2}{y}$，代入方程中，

$$\text{左边}=(x^2-y^2-z^2)\frac{2x}{f'-2z}+2xy\frac{2y-f+\frac{z}{y}f'}{f'-2z}=\frac{2xzf'-4xz^2}{f'-2z}=2xz=\text{右边}.$$

【例 5-47】 设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

【解】 对 $x^2-xy+y^2=1$ 两边关于 x 求导，得

$$2x-y-xy'+2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{2x-y}{x-2y}.$$

再对 $2x-y-xy'+2yy'=0$ 两边关于 x 求导，得

$$2-y'-y'-xy''+2y'^2+2yy''=0\Rightarrow y''=\frac{2y'-2y'^2-2}{2y-x}=\frac{-6}{(2y-x)^3}.$$

对 $z=x^2+y^2$ 两边关于 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2yy'=2x+2y\frac{2x-y}{x-2y},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=2+2y'^2+2yy''=\frac{10x^3-18x^2y+24xy^2-8y^3}{(x-2y)^3}.$$

【例 5-48】 求方程组 $\begin{cases}u=xyz\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 所确定的函数的偏导数 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

【解】 对 $x^2+y^2+z^2=1$ 两边关于 x 求偏导，得 $x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$，即 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$. 同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$. 对 $x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导得，

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0.$$

解得 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$，$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3}$. 故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz^2-x^2z}{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^3y+3xyz^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z^2-y^2z^2-x^2z^2-x^2y^2}{z^3}.$$

【例 5-49】 已知方程组$\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2+v^2\\ z=u^3+v^3\end{cases}$定义了 z 为 x，y 的函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 方程 $x=u+v$ 和 $y=u^2+v^2$ 两边对 x 求导，得

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u-v}.$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-3uv.$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3(u+v)}{2}.$$

§3 隐函数存在定理及其应用

一、基本要求

1. 理解由一个方程或方程组所确定的隐函数(组)的存在性定理(存在性、连续性、可微性)及证明思路.

2. 会用定理证明由一个方程或方程(组)所确定的隐函数(组)的存在性，会求隐函数、反函数组的偏导数.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $F(x, y)$ 满足条件：① F_x，F_y 在区域 D：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$ 内连续；② $F(x_0, y_0)=0$；③ $F_y(x_0, y_0)\neq 0$. 则① 在 $P_0(x_0, y_0)$点的某邻域内，$F(x, y)=0$ 惟一确定一个定义在 x_0 点的某个邻域 $O(x_0, \delta)$内的函数 $y=y(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$；② $y=y(x)$在 $O(x_0, \delta)$内连续；③ $y=y(x)$在 $O(x_0, \delta)$内具有连续的导数，且

$$y'(x)=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

上述结论可推广到多元隐函数的情形.

2. 设函数 $F(x, y, u, v)$, $G(x, y, u, v)$满足: ① 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$的某个邻域 U 内, 对各变元有一阶连续偏导数; ② $F(P_0)=0$, $G(P_0)=0$(初始条件); ③ $J=\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{P_0}=\left|\begin{matrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{matrix}\right|_{P_0}\neq 0$. 则① 在点 P_0 的某邻域内, 由方程组$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0 \\ G(x, y, u, v)=0 \end{cases}$惟一地确定一组函数 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ $((x, y)\in D)$满足 $u_0=u(x_0, y_0)$, $v_0=v(x_0, y_0)$; ② $u=u(x, y)$和 $v=v(x, y)$在 D 内连续; ③ $u=u(x, y)$和 $v=v(x, y)$在 D 内具有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

上述结论可推广到多个变量、多个方程的情形.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-50】 方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$ 在原点附近能否用形如 $y=f(x)$的方程表示? 又能否用形如 $x=g(y)$的方程表示?

【解】 令 $F(x, y)=x^2+y+\sin(xy)$, 则 $F_x=2x+y\cos(xy)$, $F_y=1+x\cos(xy)$, 它们都在 R^2 连续, 而 $F(0, 0)=0$, $F_x(0, 0)=0$, $F_y(0, 0)=1\neq 0$, 故方程在(0, 0)点附近可惟一确定有连续导数的函数 $y=f(x)$, 但是无法断定能否在(0, 0)的附近确定函数 $x=g(y)$.

【例 5-51】 方程 $F(x, y)=y^2-x^2(1-x^2)=0$ 在哪些点的附近可惟一地确定单值、连续且有连续导数的函数 $y=f(x)$?

【解】 由于 $F(x, y)$在 R^2 连续, 且 $F'_x=4x^3-2x$ 和 $F'_y=2y$ 也在 R^2 连续, 当 $y\neq 0$ 时, $F'_y\neq 0$. 所以在 R^2 任意满足方程 $F(x, y)=y^2-x^2(1-x^2)=0$ 且 $y\neq 0$ 的点(x, y)的某一邻域内, 由方程都能惟一确定单值、连续且有连续导数的函数 $y=f(x)$. 由 $y\neq 0$, 得 $x^2(1-x^2)\neq 0$, 即 $x\neq 0$ 且 $x\neq\pm 1$, 所以在$(-1, 0)\cup(0, 1)$范围内方程能惟一确定有连续导数的单值函数 $y=f(x)$.

【例 5-52】 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $P_0(0, 1, 1)$的某邻域内能否确定出某一个变量是另外两个变量的函数?

【解】 令 $F(x, y, z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1$，则 $F(P_0)=0$，$F_x(P_0)=y+ze^{xz}|_{P_0}\neq 0$，$F_y(P_0)=x+\dfrac{z}{y}\bigg|_{P_0}\neq 0$，$F_z(P_0)=\ln y+xe^{xz}|_{P_0}=0$，故能惟一确定 $x=f(y, z)$ 和 $y=g(x, z)$，但不能断定能否确定 $z=h(x, y)$。

【例 5-53】 设 f 是一元函数，试问 f 应满足什么条件，方程

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点(1, 1)的邻域内能确定出惟一的 y 为 x 的函数?

【解】 令 $F(x, y)=f(x)+f(y)-2f(xy)$，显然 $F(1, 1)=0$。若① F_x，F_y 在点(1, 1)的邻域内连续；② $F_y|_{(1,1)}=f'(1)-2f'(1)=-f'(1)\neq 0$，则方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在点(1, 1)的邻域内能确定惟一的 y 为 x 的函数。而上述的条件等价于：① $f(x)$ 在 $x=1$ 的邻域内连续，在 $x=1$ 处可导，② $f'(1)\neq 0$。

【例 5-54】 设有方程 $x=y+\varphi(y)$，其中 $\varphi(0)=0$，且当 $-a<y<a$ 时，$|\varphi'(y)|\leqslant k<1$。证明存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$ 时，存在惟一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$。

【解】 令 $F(x, y)=x-y-\varphi(y)$，则 $F(0, 0)=0$，$F_x=1$，$F_y=-1-\varphi'(y)\neq 0$。故 $\exists\,\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$，$-\delta<y<\delta$ 时可惟一确定可微函数 $y=y(x)$ 且 $y(0)=0$。

【例 5-55】 讨论方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

在点 $P_0(1, -1, 2)$ 的附近能否确定形如 $x=f(z)$，$y=g(z)$ 的隐函数组。

【解】 记 $F(x, y, z)=x^2+y^2-\dfrac{1}{2}z^2$，$G(x, y, z)=x+y+z-2$。则 F 和 G 满足：① 在点 P_0 的某个邻域 U 内有对各个变元的一阶连续偏导数(事实上在 R^2 都有对各个变量的一阶连续偏导数)；② $F(P_0)=0$，$G(P_0)=0$；③ $J=\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\bigg|_{P_0}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{P_0}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$，所以方程组在点 P_0 的附近能确定隐函数组 $x=f(z)$，$y=g(z)$。

【例 5-56】 求下列函数组的反函数的偏导数：

(1) 设 $u=x\cos\dfrac{y}{x}$，$v=x\sin\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial u}$，$\dfrac{\partial x}{\partial v}$，$\dfrac{\partial y}{\partial u}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v}$；

(2) 设 $u=e^x+x\sin y$，$v=e^x-x\cos y$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial u}$，$\dfrac{\partial x}{\partial v}$，$\dfrac{\partial y}{\partial u}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v}$。

【解】 (1) $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} & -\sin\frac{y}{x}\\ \sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} & \cos\frac{y}{x}\end{vmatrix}=1,$

则
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{y}{x},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}.$$

(2) $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}e^x+\sin y & x\cos y\\ e^x-\cos y & x\sin y\end{vmatrix}=xe^x(\sin y-\cos y)+x,$

则
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x\sin y}{xe^x(\sin y-\cos y)+x},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\cos y}{xe^x(\sin y-\cos y)+x},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{e^x-\cos y}{xe^x(\sin y-\cos y)+x},$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x+\sin y}{xe^x(\sin y-\cos y)+x}.$$

【例 5-57】 设 $u=\frac{x}{r^2}$，$v=\frac{y}{r^2}$，$w=\frac{z}{r^2}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 试求以 u，v，w 为自变量的反函数；

(2) 计算$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

【解】 (1) $u^2+v^2+w^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}$,

$$x=u\cdot r^2=\frac{u}{u^2+v^2+w^2},\ y=v\cdot r^2=\frac{v}{u^2+v^2+w^2},$$
$$z=w\cdot r^2=\frac{w}{u^2+v^2+w^2}.$$

(2) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{r^2-2x^2}{r^4} & \frac{-2xy}{r^4} & \frac{-2xz}{r^4}\\ \frac{-2xy}{r^4} & \frac{r^2-2y^2}{r^4} & \frac{-2yz}{r^4}\\ \frac{-2xz}{r^4} & \frac{-2yz}{r^4} & \frac{r^2-2z^2}{r^4}\end{vmatrix}=-\frac{1}{r^6}.$

【例 5-58】 设 f_i，φ_i 连续可微，且

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)=f_i(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_n(x_n)) \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

求$\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$.

【解】
$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} f'_1\varphi'_1 & f'_1\varphi'_2 & \cdots & f'_1\varphi'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_n\varphi'_1 & f'_n\varphi'_2 & \cdots & f'_n\varphi'_n \end{vmatrix}$$
$$=f'_1f'_2\cdots f'_n\begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \end{vmatrix}=0.$$

【例 5-59】 据理说明在点(0, 1)附近是否存在连续可微函数 $f(x, y)$和 $g(x, y)$满足 $f(0, 1)=1$, $g(0, 1)=-1$, 且$[f(x, y)]^3+xg(x, y)-y=0$, $[g(x, y)]^3+yf(x, y)-x=0$.

【解】 考察方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=u^3+xv-y=0 \\ G(x, y, u, v)=v^3+yu-x=0 \end{cases}$$

记 P_0 为(0, 1, 1, −1), 则 $F(P_0)=G(P_0)=0$, F 和 G 在(0, 1, 1, −1)的任何邻域有连续偏导数, 且

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{vmatrix}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=9\neq0,$$

所以方程组可以在(0, 1, 1, −1)点的任何邻域内惟一确定隐函数组 $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, 它们定义在(0, 1)的附近, $f(0, 1)=1$, $g(0, 1)=-1$, 且

$[f(x, y)]^3+xg(x, y)-y=0$, $[g(x, y)]^3+yf(x, y)-x=0$.

【例 5-60】 设

$$\begin{cases} u=f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t)=0 \\ h(z, t)=0 \end{cases}.$$

问在什么条件下 u 是 x, y 的函数? 并求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

【解】 当 g 和 h 对 z, t 有一阶连续偏导数, 且$\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}\neq0$ 时可以惟一确

定隐函数组：$z=z(y)$，$t=t(y)$，代入 f 中得 $u=f(x,\ y,\ z(y),\ t(y))$，从而可以确定 u 是 x，y 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}.$$

再由 $\begin{cases} g(y,\ z(y),\ t(y))=0 \\ h(z(y),\ t(y))=0 \end{cases}$，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\partial h}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0 \end{cases}.$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{-\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial t}}{\dfrac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}},\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}}{\dfrac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}}.$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial(h,\ f)}{\partial(z,\ t)}\Big/\frac{\partial(z,\ t)}{\partial(g,\ h)}\right).$$

【例 5-61】 设 $z=z(x,\ y)$满足方程组 $\begin{cases} f(x,\ y,\ z,\ t)=0 \\ g(x,\ y,\ z,\ t)=0 \end{cases}$，求 $\mathrm{d}z$.

【解】 当$\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ t)}\neq 0$ 时，存在隐函数 $z=z(x,\ y)$，$t=t(x,\ y)$. 代入 f，g 中，得

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ z(x,\ y),\ t(x,\ y))=0 \\ g(x,\ y,\ z(x,\ y),\ t(x,\ y))=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y}=0 \end{cases}.$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(t,\ x)}}{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ t)}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(t,\ y)}}{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ t)}}.$$

所以
$$\mathrm{d}z=\frac{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(t,\ x)}}{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ t)}}\mathrm{d}x+\frac{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(t,\ y)}}{\dfrac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ t)}}\mathrm{d}y.$$

【例 5-62】 设$(x_0,\ y_0,\ z_0,\ u_0)$满足方程组

$$\begin{cases} f(x)+f(y)+f(z)=F(u) \\ g(x)+g(y)+g(z)=G(u), \\ h(x)+h(y)+h(z)=H(u) \end{cases}$$

这里所有的函数假定都有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点邻域内确定 x, y, z 作为 u 的函数的充分条件;

(2) 在 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^3$ 的情形下, 上述条件相当于什么?

【解】 (1) $\begin{vmatrix} f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0) \\ g'(x_0) & g'(y_0) & g'(z_0) \\ h'(x_0) & h'(y_0) & h'(z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

(2) x_0, y_0, z_0 互不相等.

§4 几何应用、极值与条件极值

一、基本要求

1. 会求空间曲线的切线和法平面方程, 曲面的切平面和法线方程.

2. 理解多元函数的极值和条件极值的概念, 掌握二元函数极值存在的充分必要条件.

3. 会求二元函数的极值, 掌握求条件极值的拉格朗日乘数法.

二、主要概念和内容

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 参数形式表示的空间曲线 L: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $P(x(t_0), y(t_0), z(t_0))\in L$, 则过 P 点曲线的切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2) 空间曲线 L: $y=y(x)$, $z=z(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, $P(x_0, y(x_0), z(x_0))\in L$, 则过 P 点曲线的切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0.$$

(3) 空间曲线 L：$\begin{cases}F(x, y, z)=0\\G(x, y, z)=0\end{cases}$，$P(x_0, y_0, z_0)\in L$，则过 P 点曲线的切线方程和法平面方程分别为：

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_P},$$

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_P(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_P(z-z_0)=0.$$

2. 空间曲面的切平面与法线

(1) 空间曲面 π：$F(x, y, z)=0$，$P(x_0, y_0, z_0)\in\pi$，则过 P 点曲面的切平面方程和法线方程分别为：

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(2) 空间曲面 π：$z=f(x, y)$，$P(x_0, y_0, z_0)\in\pi$，则过 P 点曲面的切平面方程和法线方程分别为：

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

3. 多元函数的极值

(1) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $O(P_0)$ 内有定义. 若 $\forall P(x, y)\in O(P_0)$，都有 $f(P)\leqslant f(P_0)$（或 $f(P)\geqslant f(P_0)$），则称函数 f 在点 P_0 取到极大(小)值，点 P_0 称为 f 的极大(小)值点.

极大值和极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.

(2) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 存在对各变元的偏导数，且 P_0 是极值点，则有 $f_x(P_0)=0$，$f_y(P_0)=0$.

(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，且 $f_x(P_0)=0, f_y(P_0)=0$. 令 $a_{11}=f_{xx}(P_0)$，$a_{12}=f_{xy}(P_0)$，$a_{22}=f_{yy}(P_0)$，$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$.

(ⅰ) 若 $D>0$，则当 $a_{11}>0$(或 $a_{22}>0$)时，f 在 P_0 点取极小值；当 $a_{11}<0$(或 $a_{22}<0$)时，f 在 P_0 点取极大值.

(ⅱ) 若 $D<0$，则 P_0 不是 f 的极值点.

(ⅲ) 若 $D=0$，则需进一步讨论.

4. 条件极值　函数 $z=f(x, y)$在约束条件 $\varphi(x, y)=0$ 下的极值的求法。

(1) 从条件 $\varphi(x, y)=0$ 中解出 $y=y(x)$，代入 $z=f(x, y(x))$，即化为一元函数的无条件极值问题.

(2) 拉格朗日乘数法：作 $F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$，然后从 $F_x(x, y, \lambda)=0, F_y(x, y, \lambda)=0, F_\lambda(x, y, \lambda)=\varphi(x, y)=0$ 中解出的 x，y 就是可能的极值点的坐标.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-63】 求下列曲线所示点处的切线方程和法平面方程：

(1) $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$，在点 $t=\frac{\pi}{4}$；

(2) $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$，在点$(1, -2, 1)$.

【解】 (1) $t=\frac{\pi}{4}$所对应的曲线上的点为$\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$，曲线过该点的切向量为 $\tau=(a, o, -c)$，所以，切线方程为$\frac{x-\frac{1}{2}a}{a}=\frac{y-\frac{1}{2}b}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}c}{-c}$，法平面方程为 $a\left(x-\frac{1}{2}a\right)-c\left(z-\frac{1}{2}c\right)=0$.

(2) 对$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$两边关于 x 求导，得$\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=0\\1+y'+z'=0\end{cases}\Rightarrow y'=\frac{z-x}{y-z}$，$z'=\frac{y-x}{z-y}$，$y'|_{(1,-2,1)}=0$，$z'|_{(1,-2,1)}=-1$，所以切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$，法平面方程为$(x-1)-(z-1)=0\Rightarrow x-z=0$.

【例 5-64】 求下列曲面在所示点处的切平面方程和法线方程：

(1) $y-e^{2x-z}=0$ 在点$(1, 1, 2)$；

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

【解】 (1)设 $f(x, y, z)=y-e^{2x-z}$，则曲面过点 $P_0(1, 1, 2)$的切平面的法向量为 $n=(f_x, f_y, f_z)|_{P_0}=(-2e^{2x-z}, 1, e^{2x-z})|_{P_0}=(-2, 1, 1)$. 故切平面方程为 $-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$，即 $2x-y-z+1=0$；法线方程为$\frac{x-1}{-2}=y-1=z-2$.

(2) 设 $f(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, 则曲面过点 $P_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(f_x, f_y, f_z)\big|_{P_0}=\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)\Big|_{P_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, 故切平面方程为 $\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0$, 即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$;

法线方程为 $a\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=b\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)=c\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

【例 5-65】 证明曲线 $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线相交成同一角.

【证明】 因为曲线方程满足 $x^2+y^2=z^2$, 故曲线上的任一点都在锥面上. 取圆锥上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则 x_0, y_0, z_0 满足 $x_0^2+y_0^2=z_0^2$, 且过 P_0 点的母线 L 的方程为 $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$, 其方向向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0, y_0, z_0)$. 设 L 和曲线的交点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 x_1, y_1, z_1 满足: $x_1^2+y_1^2=z_1^2$, 且 $\frac{x_1}{x_0}=\frac{y_1}{y_0}=\frac{z_1}{z_0}$, 记 $\frac{x_1}{x_0}=\frac{y_1}{y_0}=\frac{z_1}{z_0}=k$, 则 $x_1=kx_0$, $y_1=ky_0$, $z_1=kz_0$. 曲线在 P_1 点的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t), y'(t), z'(t))\big|_{P_1}=(x_1-y_1, x_1+y_1, z_1)=k(x_0-y_0, x_0+y_0, z_0)$. 设 α 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的夹角, 则

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{x_0(x_0-y_0)+y_0(x_0+y_0)+z_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{(x_0-y_0)^2+(x_0+y_0)^2+z_0^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}(\text{常数}).$$

所以曲线和圆锥上母线相交成同一角度.

【例 5-66】 求平面曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(a>0)$ 上任一点处的切线方程, 并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

【解】 对 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 两边关于 x 求导, 得 $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$, 故切线方程为 $Y-y=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}(X-x)$. 令 $Y=0$, 得 $X=a^{2/3}x^{1/3}$; 令 $X=0$, 得 $Y=a^{2/3}y^{1/3}$. 所以 $\sqrt{X^2+Y^2}=a^{2/3}$(常数).

【例 5-67】 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面, 使它平行于平面 $x+4y$

$+6z=0$.

【解】 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上任一点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x, 4y, 6z)$，要使曲面的切平面平行于 $x+4y+6z=0$，则 $\boldsymbol{n}=(2x, 4y, 6z)=m(1, 4, 6)$. 从而 $x=m$，$y=z=2m$. 代入曲面方程得，$m^2+2(2m)^2+3(2m)^2=21 \Rightarrow m=\pm 1$，所以，所求的切平面为 $x-1+4(y-2)+6(z-2)=0$ 和 $x+1+4(y+2)+6(z+2)=0$.

【例 5-68】 证明曲面 $F(x-az, y-bz)=0$ 的切平面与某一定直线平行，其中 a，b 为常数.

【证明】 $F(x-az, y-bz)=0$ 两边分别关于 x，y 求导，得

$$F_1\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{aF_1+bF_2},$$

$$F_1\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_2\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2}{aF_1+bF_2}.$$

所以曲面 $F(x-az, y-bz)=0$ 上任一点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(F_1, F_2, -aF_1-bF_2)$. 令 $\boldsymbol{\tau}=(a, b, 1)$则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$. 所以切平面必与所有以 $\boldsymbol{\tau}$ 为方向向量的直线平行.

【例 5-69】 证明曲面 $z=xe^{\frac{x}{y}}$的每一切平面都过原点.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}+xe^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}=e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{\frac{x}{y}}\frac{x^2}{y^2}$，故曲面过点 $P(x, y, z)$的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(e^{\frac{x}{y}}(1+xy^{-1}), -e^{\frac{x}{y}}x^2y^{-2}, -1)$，从而该点的切平面为

$$e^{\frac{x}{y}}(1+xy^{-1})(X-x)-e^{\frac{x}{y}}x^2y^{-2}(Y-y)-(Z-z)=0,$$

由 $xe^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)-ye^{\frac{x}{y}}\frac{x^2}{y^2}-z=e^{\frac{x}{y}}\left(x+\frac{x^2}{y}-\frac{x^2}{y}-x\right)=0$ 知，该切平面必过原点.

【例 5-70】 求下列函数的极大值和极小值点：

(1) $f(x, y)=(x-y+1)^2$；

(2) $f(x, y)=3axy-x^3-y^3 \quad (a>0)$；

(3) $f(x, y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y) \quad \left(0\leqslant x, y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

【解】 (1) 令$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x-y+1)=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-2(x-y+1)=0$，则 $x-y+1=0$，即该直线上所有点都为稳定点. 由极小值点的定义以及 $f(x, y)$非负可知：$x-y+1=0$ 上的所有点都为极小值点.

(2) 令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3ay-3ax^2=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3ax-3y^2=0$. 解得稳定点为(0, 0)，(a, a).

$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{vmatrix}=-9a^2<0$，故(0, 0)不是极值点，

$D_2=\begin{vmatrix} -6a & 3a \\ 3a & -6a \end{vmatrix}_{(a,a)}=27a^2>0$，且 $a_{11}=-6a<0$，故(a, a)是极大值点.

(3) 令 $f'_x=\cos x-\sin(x-y)=0$，$f'_y=-\sin y+\sin(x-y)=0$，得 $x_0=\dfrac{\pi}{3}$，$y_0=\dfrac{\pi}{6}$. $a_{11}=f''_{xx}(x_0, y_0)=-\sqrt{3}$，$a_{12}=f''_{xy}(x_0, y_0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a_{22}=f''_{yy}(x_0, y_0)=-\sqrt{3}$, $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=3-\dfrac{3}{4}>0$，又因为 $a_{11}<0$，所以$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$是 f 的极大值点.

【例 5-71】 已知 $y=ax^2+bx+c$，观测的一组数据(x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，利用最小二乘法，求系数 a，b，c 所满足的三元一次方程组.

【解】 记 $f(a, b, c)=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$，令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial c}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i^2 \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+c\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases}.$$

记 $J=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^4 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}$，　$J_1=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}y_i & \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}$，

$$J_2=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_i^4 & \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}y_i & n\end{vmatrix},\ J_3=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^4 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\end{vmatrix},$$

则上述方程组的解为　　$a=\dfrac{J_1}{J},\ b=\dfrac{J_2}{J},\ c=\dfrac{J_3}{J}$.

【例 5-72】 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$ 内的最大值和最小值.

【解】 函数 $f(x,y)$在 D 内可导，令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$，解得 $x=0,y=0$(稳定点)，而 $D=\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{vmatrix}=-4<0$，故$(0,0)$不是 f 的极值点. 又 $f(x,y)$在闭区域 D 连续，所以 $f(x,y)$在 D 必有最大值、最小值，而且只能在边界上取得，而在 D 的边界$\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$上，$f(x,y)=x^2-(4-x^2)=2x^2-4\quad(-2\leqslant x\leqslant 2)$，于是当 $x=\pm 2$ 时，$f(x,y)$有最大值 4；当 $x=0$ 时，有最小值 -4.

【例 5-73】 求证：$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ 在 $\mathbf{R}^2$ 有最小值，无最大值，其中 $A>0$，$B^2<AC$.

【证明】 令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2Ax+2By+2D=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2Bx+2Cy+2E=0$，解得 $x_0=\dfrac{BE-DC}{AC-B^2}$，$y_0=\dfrac{BD-AE}{AC-B^2}$，即 $P_0\left(\dfrac{BE-DC}{AC-B^2},\dfrac{BD-AE}{AC-B^2}\right)$为稳定点，又 $D=\begin{vmatrix}2A & 2B\\2B & 2C\end{vmatrix}=4(AC-B^2)>0$，且 $a_{11}=2A>0$，所以 P_0 为 f 的最小值，而无最大值.

【例 5-74】 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求出面积最大的三角形.

【解】 设三边长为 x,y,z，则 $z=2p-x-y$，由海伦公式得三角形的面积为

$$S=\sqrt{2p(2p-x)(2p-y)(2p-z)}=\sqrt{2p(2p-x)(2p-y)(x+y)}.$$

记 $f(x,\ y)=\frac{S^2}{2p}=(2p-x)(2p-y)(x+y)$，则要使 S 最大，只需 $f(x,\ y)$ 最大．令

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(2p-x)(2p-y)-(2p-y)(x+y)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(2p-x)(2p-y)-(2p-y)(x+y)=0.$$

解得 $x=y=\frac{2p}{3}$．这时 $z=\frac{2p}{3}$．由实际情形，当该三角形为正三角形时面积最大．

【例 5-75】 求下列函数在所给条件下的极值：

(1) $f=x+y$，若 $x^2+y^2=1$；

(2) $f=x^2+y^2$，若 $x+y-1=0$；

(3) $f=x-2y+2z$，若 $x^2+y^2+z^2=1$.

【解】 (1)作拉格朗日函数 $L(x,y)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$，令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0\\ L_y=1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow \text{稳定点为：}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

下面判断稳定点是否为极值点．若记 $F(x,\ y)=x^2+y^2-1$，则 $F_y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2y\Big|_{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{2}\neq0$，故方程在稳定点附近可惟一确定可微函数 $y=y(x)$，且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$．令 $g(x)=f(x,y(x))$，则 $g'(x)=1+y'=1-\frac{x}{y}$，$g''(x)=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$，则 $g'(x)\Big|_{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$，$g''(x)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}<0$．$g''(x)\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}>0$，所以 g 在 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点取极大值，在 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点取极小值，即 $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 点取极大值，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 点取极小值．

(2) $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 点取极小值 $\frac{1}{2}$.

(3) 构造拉格朗日函数 $L=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0\\ L_y=-2+2\lambda y=0\\ L_z=2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Rightarrow \text{稳定点为}\left(\pm\frac{1}{3},\mp\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right).$$

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_z\left(\pm\frac{1}{3},\mp\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right)=2z\Big|_{\pm\frac{2}{3}}=\pm\frac{3}{4}\neq 0$，所以 $F(x,y,z)$在稳定点附近可惟一确定单值函数 $z=z(x,y)$，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$.

令 $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$，则 $g_x=1-\frac{2x}{z}$，$g_y=-2-\frac{2y}{z}$，$g_{xx}=-\frac{2z^2+2x^2}{z^3}$，$g_{yy}=-\frac{2z^2+2y^2}{z^3}$，$g_{xy}=-\frac{2xy}{z^3}$.

$$D=\begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy}\end{vmatrix}_{\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}=\begin{vmatrix} -\frac{33}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -6\end{vmatrix}=\frac{90}{4}>0,$$

且

$$a_{11}=g_{xx}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{15}{4}<0,$$

所以 $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 是 $g(x,y)$ 的极大值点. 类似地可得，$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$是 $g(x,y)$的极小值点.

【例 5-76】 求 $f=x^my^nz^p$ 在条件 $x+y+z=a$，$a>0$，$m>0$，$n>0$，$p>0$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 下的最大值.

【解】 作拉格朗日函数 $L(x,y,z)=x^my^nz^p+\lambda(x+y+z-a)$，令

$$\begin{cases} L_x=mx^{m-1}y^nz^p+\lambda=0 \\ L_y=nx^my^{n-1}z^p+\lambda=0 \\ L_z=px^my^nz^{p-1}+\lambda=0 \\ x+y+z=a \end{cases} \Rightarrow \text{稳定点为}\begin{cases} x_0=\frac{ma}{m+n+p} \\ y_0=\frac{na}{m+n+p} \\ z_0=\frac{pa}{m+n+p}\end{cases}.$$

由于稳定点惟一，而 $f(x,y,z)$在 $x+y+z=a$ 下有最大值，所以最大值 $f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p}m^mn^np^p$.

【例 5-77】 长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆. 这两段的长各为多少时，它们所围成的正方形面积和圆面积之和最小?

【解】 设围成正方形的一段长为 x，围成圆的一段长为 y. 则 $x+y=a$，面积之和为 $S=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2$. 利用拉格朗日乘数法可得，当围成正方形

的铁丝长为$\frac{4a}{4+\pi}$，围成圆的铁丝长为$\frac{\pi a}{4+\pi}$时，它们的面积和最小.

§5 综合题

【例 5-78】 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 连续，$\forall c\in(-\infty,+\infty)$，若集合 $E=\{(x,y)\mid f(x,y)>c,(x,y)\in D\}$ 不空，则 E 为开集.

【证明】 设 $\forall c\in(-\infty,+\infty)$，$E$ 非空. $\forall P_0(x_0,y_0)\in E$，则 $f(P_0)>c$；且 $P_0\in D$，因为 D 为区域，所以 $\exists\delta_1>0$，使得 $O(P_0,\delta_1)\subset D$. 令 $\varepsilon_0=f(P_0)-c>0$. 由于 f 在 D 连续，所以存在 $\delta_0\in(0,\delta_1]$，使当 $r(P,P_0)<\delta_0$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon_0$，即 $f(x,y)>f(x_0,y_0)-\varepsilon_0=c$. 从而 $O(P_0,\delta_0)\subset E$，由 P_0 的任意性知 E 为开集.

【例 5-79】 证明：若函数 $f(x,y)$ 在某区域 D 内对变量 x 是连续的，而对变量 y 关于 x 是一致连续的，则 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

【证明】 $\forall(x_0,y_0)\in D$，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|,$$

由于 $f(x,y)$ 对变量 x 连续，对变量 y 关于 x 是一致连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$；及 $\exists\delta_2>0$，当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，$\forall x$，有 $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$，即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，由 (x_0,y_0) 的任意性可知，$f(x,y)$ 在 D 连续.

【例 5-80】 设函数 $f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 连续，$\varphi(x)$ 在 (a,b) 连续，证明若 $\forall x\in(a,b)$，有 $\varphi(x)\in(c,d)$，则 $g(x)=f(x,\varphi(x))$ 在 (a,b) 连续.

【证明】 设 $\forall x_0\in(a,b)$，$\varphi(x_0)\in(c,d)$. 由 $f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 连续知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-\varphi(x_0)|<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,\varphi(x_0))|<\varepsilon$. 又 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，故对上述 $\delta>0$，$\exists\eta>0$，当 $|x-x_0|<\eta$ 时，有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta$. 从而，当 $|x-x_0|<\min\{\delta,\eta\}$ 时，$|g(x)-g(x_0)|=|f(x,\varphi(x))-f(x_0,\varphi(x_0))|<\varepsilon$，即 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，由 x_0 的任意性知，$g(x)$ 在 (a,b) 连续.

【例 5-81】 （复旦大学　2001 年）　设 $z=z(x,y)$ 是由隐函数 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定，求表达式 $x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}$，并化简之.

【解】 对 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 x 求导，得

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x^2}\cdot F'_2-F'_1}{\frac{F'_1}{y}+\frac{F'_2}{x}}=\frac{yzF'_2-yx^2F'_1}{x^2F'_1+xyF'_2}.$$

对 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 y 求导，得

$$F'_1\cdot\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}\right)+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy^2F'_2-xzF'_1}{xyF'_1+y^2F'_2}.$$

所以
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(xy^2+yz)F'_2-(x^2y+xz)F'_1}{xF'_1+yF'_2}.$$

【例 5-82】 设 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=f(x,y)$为由方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 所确定的隐函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【解】 把 z 看成x,y的函数，方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 两边对 x 求偏导数得，

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}=3yz+3xy\frac{\partial z}{\partial x},$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2},$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\frac{x^2-yz}{xy-z^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+2z\frac{x^2-yz}{xy-z^2}\right)$$

$$=2+2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x^2-yz}{xy-z^2}+2z\frac{\left(2x-y\frac{\partial z}{\partial x}\right)(xy-z^2)-(x^2-yz)\left(y-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(xy-z^2)^2}$$

$$=2+\frac{2(x^2-yz)^2}{(xy-z^2)^2}+\frac{4xz^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{(xy-z^2)^3}.$$

【例 5-83】 设 $F(x,y,z)$有一阶连续偏导数，并满足不等式：

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geqslant a>0,\ \forall(x,y,z)\in \mathbf{R}^3.$$

证明当动点(x,y,z)沿曲线 $\Gamma: x=-\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ t\geqslant 0$ 趋于无穷远点(即 $t\to+\infty$)时，$F(x,y,z)\to\infty$.

【证明】 由泰勒公式：

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= F(-\cos t,\sin t,t)\\
&= F(-1,0,0)+[F(-\cos t,\sin t,t)]'\Big|_{t=\xi}(t-0)\\
&= F(-1,0,0)+t\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin t+\frac{\partial F}{\partial y}\cos t+\frac{\partial F}{\partial t}\right)\Big|_{t=\xi}\\
&= F(-1,0,0)+t\left(\frac{\partial F}{\partial x}y-\frac{\partial F}{\partial y}x+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{t=\xi}\\
&\geqslant F(-1,0,0)+at,\ 其中\ 0<\xi<t.
\end{aligned}
$$

故当 $t\to+\infty$时，$F(x,y,z)\to\infty$.

【例 5-84】 求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 上与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

【解】 平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $n=\{1,2,1\}$，而曲线 $x=t$，$y=-t^2,z=t^3$ 的切向量为 $\tau=\{1,-2t,3t^3\}$，当曲线的切线与已知平面平行时，有 $n\perp\tau$，即 $n\cdot\tau=0$，亦即 $1-4t+3t^2=0\Rightarrow t=1,t=\frac{1}{3}$. 当 $t=1$ 时，曲线上的点$(1,-1,1)$的切向量为 $\tau=\{1,-2,3\}$，故切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. 当 $t=\frac{1}{3}$时，曲线上的点$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$的切向量为 $\tau=\left\{1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$，故切线方程为$\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$，即$\frac{3x-1}{1}=\frac{9y+1}{-2}=\frac{27z-1}{3}$.

【例 5-85】（中国人民大学 2000 年） 证明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，而没有极小值.

【证明】 由 $\begin{cases} z_x=-(1+e^y)\sin x=0\\ z_y=(\cos x-y-1)e^y=0\end{cases}$ 得，函数有无穷多个稳定点$(n\pi,(-1)^n-1)$，其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 当 $n=2k$ 时，对应的稳定点为$(2k\pi,0)$，此时

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x\Big|_{(2k\pi,0)}=-2,$$

$$a_{12}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x\Big|_{(2k\pi,0)}=0,$$

$$a_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(\cos x-y-z)e^y\Big|_{(2k\pi,0)}=-1,$$

$a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2>0$，且 $a_{11}<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(2k\pi,0)$ 处有极大值且 $f(2k\pi,0)=2$.

当 $n=2k+1$ 时，对应的稳定点为 $((2k+1)\pi,-2)$，此时

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x\Big|_{((2k+1)\pi,-2)}=1+e^{-2},$$

$$a_{12}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x\Big|_{((2k+1)\pi,-2)}=0,$$

$$a_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(\cos x-y-x)e^y\Big|_{((2k+1)\pi,-2)}=-e^{-2},$$

$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $((2k+1)\pi,-2)$ 处无极值.

第六章　多元函数积分学

§1　重积分

一、基本要求

1. 掌握二重积分化为累次积分的计算方法，掌握二重积分的极坐标变换.

2. 掌握三重积分化为累次积分的计算方法，掌握三重积分的柱坐标变换、球坐标变换.

3. 会用二重积分、三重积分计算一些几何量与一些物理量.

二、主要概念和结论

1. 重积分的定义　与定积分类似，重积分也定义为一类和式的极限.

二重积分：$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$.

三重积分：$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$.

其值取决于被积函数及其积分区域，而与积分变量的记号无关；连续是可积的必要条件.

与定积分不同的是：二重积分是定义在平面区域 D 上的二元函数，对 D 任意分割，每一小块面积为 $\Delta\sigma_i$，从 $\Delta\sigma_i$ 上任取的一点是(ξ_i, η_i)，λ 是所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径中的最大值；三重积分是定义在空间区域 Ω 上的三元函数，对 Ω 任意分割，每一小块体积为 Δv_i，从 Δv_i 上任取的一点是(ξ_i, η_i, ζ_i)，λ 是所有 Δv_i 的直径中的最大值.

几何与物理意义　当 $f(x, y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶，D 为底的曲顶柱体的体积，或表示面密度为 $\rho = f(x, y)$ 的平面薄片 D 的质量. 当 $f(x, y, z)\geqslant 0$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V$ 表示体密度为 $\rho =$

$f(x, y, z)$ 的空间立体 Ω 的质量.

重积分具有与定积分类似的线性性质、可加性、单调性和积分中值定理.

2. 二重积分的计算　计算重积分的方法是化重积分为累次积分.

(1) 设 D 为X-型区域, 即 $D=\{(x, y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$, 则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

设 D 为Y-型区域, 即 $D=\{(x, y)\mid \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}$, 则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

(2) 变量代换　二重积分的变量代换公式

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中, 平面 Ouv 上的闭区域 Δ 通过变换 $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ 一一映射为平面 Oxy 上的闭区域 D, φ, ψ 在 Δ 上有二阶连续偏导数, 且当 $(u, v)\in\Delta$ 时, $J(u, v)=\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\neq 0$. 由变量代换公式可推出极坐标下二重积分的计算方法:若 D: $\begin{cases} r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta) \\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \end{cases}$, 则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

3. 三重积分的计算

(1) 设 $V=\{(x, y, z)\mid z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y), y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$, 则

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

(2) 设 Ω 介于平面 $Z=e$ 和 $Z=f$ 之间, 且 $\forall z\in[e, f]$, 用 $Z=z$ 去截 Ω 得到截面 D_z, 则 $\displaystyle\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}V=\int_e^f \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(3) 变量代换　三重积分的变量代换公式

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

其中，变换 $x=x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$，$z=z(u,v,w)$ 将 $Ouvw$ 坐标系的闭区域 Ω 一一映射为 $Oxyz$ 坐标系的闭区域 V，$x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$ 在 Ω 有二阶连续偏导数，且当 $(u,v,w)\in\Omega$ 时，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$.

特别，在柱面坐标系下，设直角坐标系 $Oxyz$ 下的积分区域 V 经变换（柱坐标变换）

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, & 0\leqslant r<+\infty \\ y=r\sin\theta, & 0\leqslant\theta<2\pi \\ z=z, & -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

一一映射到柱面坐标系 $Or\theta z$ 下的区域 Ω，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

若 $\Omega=\{(r,\theta,z)\mid z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta),r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

在球面坐标下，设 V 经变换（球坐标变换）

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi, & 0\leqslant r<+\infty \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & 0\leqslant\theta<2\pi \\ z=r\cos\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \end{cases}$$

一一映射到球面坐标系 $Or\varphi\theta$ 下的区域 Ω，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

4. 重积分的应用

(1) 曲面的面积　设曲面 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，其中 D 是由逐段光滑曲线围成，f 具有对 x 和 y 的连续偏导数，则其面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 质心　设 Ω 为一空间几何体，其密度函数 $\rho=\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则 Ω 的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\ \bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

若 Ω 为平面薄片，也有类似的公式.

(3) 矩　分别称 $\iiint\limits_{\Omega} x^k\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iiint\limits_{\Omega} y^k\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iiint\limits_{\Omega} z^k\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为空间几何体 Ω 关于 Oyz 面、Ozx 面和 Oxy 面的 k 阶矩. 当 $k=0$ 时为零阶矩，表示 Ω 的质量；当 $k=1$ 时为静矩，静矩与零阶矩之商为 Ω 的质心坐标；当 $k=2$ 时分别称为对 Oyz 面、Ozx 面和 Oxy 面的转动惯量，分别记为 I_{yz}，I_{zx} 和 I_{xy}. 分别称

$$\iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为 Ω 对 x 轴、y 轴和 z 轴的转动惯量，分别记为 I_x，I_y 和 I_z.

三、常用解题方法与典型例题

【例 6-1】　设 $D=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=1$，若 x 是有理数；$f(x,y)=0$，若 x 是无理数. 证明 $f(x,y)$ 在 D 不可积.

【证明】　对 D 的任意分法 T，因为在 $[0,1]$ 上的有理数与无理数是处处稠密的，所以每个小区域上的 x 值既存在有理数也存在无理数. 如果在每个小区域上取横坐标 x 为有理数的点 P'_k，则积分和 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(P'_k)\Delta\sigma_k=1$. 如果取横坐标 x 为无理数的点 P''_k，则积分和 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(P''_k)\Delta\sigma_k=0$. 所以当 $\lambda\to 0$ 时，积分和 σ_n 不存在极限，即 $f(x,y)$ 在 D 不可积.

【例 6-2】　计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{D}(y-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=[3,5]\times[1,2]$；

(2) $\iint\limits_{D} xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=[a,b]\times[c,d]$.

【解】 (1) 原式 $=\int_3^5 dx\int_1^2 (y-2x)dy=\int_3^5\left(\frac{1}{2}y^2-2xy\right)\Big|_1^2 dx$

$$=\int_3^5\left(\frac{3}{2}-2x\right)dx=-13.$$

(2) 原式 $=\int_a^b xe^{x^2}dx\int_c^d ye^{y^2}dv=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_c^d\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_a^b$

$$=\frac{1}{4}(e^{d^2}-e^{c^2})(e^{b^2}-e^{a^2}).$$

【例 6-3】 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为不同顺序的累次积分：

(1) D 由 $y=x$，$x=2$ 与 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 所围成；

(2) $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

【解】 (1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^x f(x,y)dy$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx.$$

(2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^0 dx\int_{-1-x}^{x+1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^0 dy\int_{-y-1}^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx.$$

【例 6-4】 改变下列累次积分的次序：

(1) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{3y} f(x,y)dx$；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$.

【解】 (1) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{3y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_4^6 dx\int_{\frac{x}{3}}^2 f(x,y)dy.$

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$

【例 6-5】 设 $f(x,y)$ 在所积分的区域 D 上连续，证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx.$$

【证明】 因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续，故 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 存在. D 可表示为

$D=\{(x,y)\mid a\leqslant y\leqslant x,\ a\leqslant x\leqslant b\}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant y,\ y\leqslant x\leqslant b\}$，

故 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【例 6-6】 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x^m y^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y(m,\ k>0)$，$D$ 是由 $y^2=2px(p>0)$，$x=\frac{p}{2}$ 围成的区域；

(2) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $y=0$，$y=\sin x^2$，$x=0$ 和 $x=\sqrt{\pi}$ 所围成的区域；

(3) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=\mathrm{e}^x$，$y=1$，$x=0$，$x=1$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是以(2,2)，(2,3) 和(3,1) 为顶点的三角形.

【解】 (1) $D=\left\{(x,y)\mid -p\leqslant y\leqslant p,\ \frac{y^2}{2p}\leqslant x\leqslant \frac{p}{2}\right\}$，

$$原式=\int_{-p}^{p}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x^m y^k\mathrm{d}x=\int_{-p}^{p}y^k\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x^m\mathrm{d}x=\int_{-p}^{p}y^k\frac{1}{m+1}x^{m+1}\Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-p}^{p}\left[\frac{1}{m+1}\left(\frac{p}{2}\right)^{m+1}y^k-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2p}\right)^{m+1}y^{2m+2+k}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{p}{2}\right)^{m+1}\frac{p^{k+1}-(-p)^{k+1}}{(m+1)(k+1)}+\left(\frac{1}{2p}\right)^{m+1}\frac{(-p)^{2m+k+3}-p^{2m+k+3}}{(m+1)(2m+k+3)}.$$

(2) $$原式=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=1.$$

(3) $$原式=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^{\mathrm{e}^x}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[x(\mathrm{e}^x-1)+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}-1)\right]\mathrm{d}x$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.$$

(4) $$原式=\int_2^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{4-x}^{7-2x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\int_2^3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\Big|_{4-x}^{7-2x}\mathrm{d}x=\int_2^3\mathrm{e}^3\mathrm{d}x=\mathrm{e}^3.$$

【例 6-7】 求二重积分 $I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y^2\sin x^2\mathrm{d}x$.

【解】 $D=\left\{(x,y)\mid y\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$

$$= \left\{(x,y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\},$$

交换积分次序 $I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_0^x y^2 \sin x^2 dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 dx^2$

$$\xlongequal{x^2 = t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} t \sin t\, dt = -\frac{1}{6} t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} \cos t\, dt = \frac{1}{6}.$$

注 (1) 将二重积分化为累次积分，其中最基本的步骤就是根据积分域 D 确定累次积分的积分限. 作出 D 的图形可以提供非常直观的认识，因此切不可忽视作图.

(2) 将二重积分化为累次积分时，积分次序对计算是有影响的，选择得不好，可能使计算较繁，甚至积不出来. 本例是先对 x 积分，再对 y 积分，而 $\sin x^2$ 的原函数不能用初等函数表示. 因此按上述积分进行累次积分是行不通的，所以考虑改变积分的次序. 总之在求重积分(包括三重积分等) 时，应同时兼顾积分域和被积函数的特点，合理地选择积分次序.

【例 6-8】 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, V: $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$;

(2) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, V 由曲面 $z = x^2+y^2$, $z=1$, $z=2$ 所围成;

(3) $\iiint\limits_V (1+x^4)dxdydz$, V 由曲面 $x^2 = z^2+y^2$, $x=2$, $x=4$ 所围成;

(4) $\iiint\limits_V xy^2z^3 dxdydz$, V 由曲面 $z = xy$, $y = x$, $z = 0$, $x = 1$ 所围成.

【解】 (1) 考虑到对称性.

原式 $= 3\iiint\limits_V z\,dxdydz = 3\int_{-a}^{a} z\,dz \iint\limits_{D_z} dxdy = 3\pi \int_{-a}^{a} z(a^2-z^2)dz = 0.$

(2) 用平行于 Oxy 面的平面 $Z = z$ $(z \in [1,2])$ 去截 V，其截面为 D_z: $x^2+y^2 = z$，面积为 πz，故原式 $= \int_1^2 dz \iint\limits_{D_z} z\,dxdy = \int_1^2 \pi z^2 dz = \frac{7}{3}\pi.$

(3) 用平行于 Oyz 面的平面 $X = x$ $(x \in [2,4])$ 去截 V，其截面为 D_x: $y^2+z^2 = x^2$，面积为 πx^2，故

原式 $= \int_2^4 (1+x^4)dx \iint\limits_{D_x} dydz = \int_2^4 \pi x^2(1+x^4)dx = \frac{56\pi}{3} + \frac{16256\pi}{7}.$

(4) 原式 $= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2z^3 dz = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_0^x y^6 x^5 dy$

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{364}.$$

【例 6-9】 改变下列累次积分的次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$；

(2) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\mathrm{d}z$.

【解】 (1) 原式 $= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}z \int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y +$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}z \int_{x+y}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

(2) 原式 $= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{-z}^z \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{z^2-y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{-z}^z \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

【例 6-10】 求 V 由 $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$，$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2rz$ 所确定的立体之体积.

【解】 因为 V 是两个对称的球冠，只需计算上半球冠即可. 上半球冠为

$$V_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2,\ z \geqslant \frac{r}{2}.$$

故
$$V = 2\iiint_{V_1} \mathrm{d}V = 2\int_{\frac{r}{2}}^r \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\int_{\frac{r}{2}}^r \sqrt{r^2-z^2}\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{z=rt} 2\pi r^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \pi r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

【例 6-11】 用极坐标变换将 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分：

(1) D：圆 $x^2+y^2 \leqslant ay\ (a>0)$；

(2) D：正方形 $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant a$.

【解】 (1) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$

(2) $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

【例 6-12】 用极坐标变换计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{D} \sin \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2$;

(2) $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由双纽线 $(x^2+y^2) = a^2(x^2-y^2)(x \geqslant 0)$ 围成.

【解】 (1) 原式 $= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi}^{2\pi}\sin r \cdot r\mathrm{d}r = -6\pi^2$.

(2) 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos 2\theta}} r^2 \cdot r\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^4}{16}$.

【例 6-13】 在下列积分中引入新变量 u, v, 将它们化为累次积分：

(1) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\mathrm{d}y$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$, 若 $u = x$, $v = \frac{y}{x}$;

(2) $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{a},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, 若 $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

【解】 (1) $x = u$, $y = xv = uv$, $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\}$ 变为 $\Delta = \{(u,v) \mid a \leqslant u \leqslant b,\ \alpha \leqslant v \leqslant \beta\}$, 而

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u,$$

故

$$\text{原式} = \int_a^b\mathrm{d}u\int_{\alpha}^{\beta}f(u,\ uv)u\mathrm{d}v.$$

(2) 由 $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$, 则 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为 $x = a\cos^4 v$, $y = a\sin^4 v$ $\left(0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $|J| = 4\left|u\cos^3 v\sin^3 v\right|$, D 变为 $\Delta = \left\{(u,v) \mid 0 \leqslant \mu \leqslant a,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

$$\text{原式} = 4\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\mathrm{d}v$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v\mathrm{d}v\int_0^a uf(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\mathrm{d}u.$$

【例 6-14】 作适当的变量代换求 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $xy = 2$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ 围成.

【解】 作变换 $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, 则区域 D 变为区域 $\Delta = \{2 \leqslant u \leqslant 4, 1 \leqslant v \leqslant 2\}$, 且 $|J| = \frac{1}{2v}$, 于是原式 $= \int_2^4 du \int_1^2 u \cdot \frac{1}{2v} dv = 3\ln 2$.

【例 6-15】 利用二重积分求下列曲面围成的立体的体积:

(1) $z = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

(2) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

【解】 (1) 立体在 Oxy 面上的投影区域为 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, 则

$$V = \iint_D xy \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \cos\theta \sin\theta \, dr = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{8} a^4.$$

(2) 立体在 Oxy 面上的投影区域为 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant x + y\}$.

令 $x = \frac{1}{2} + r\cos\theta$, $y = \frac{1}{2} + r\sin\theta$ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 则

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(x + y) - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(1 + r\cos\theta + r\sin\theta) - \left(r^2 + \frac{1}{2} + r\cos\theta + r\sin\theta \right) \right] r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

【例 6-16】 求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ 所围的面积.

【解】 令 $x = \frac{a}{c} r\cos\theta$, $y = \frac{b}{c} r\sin\theta$, 则曲线的极坐标方程为 $r^2 = \frac{1}{2}\sin 2\theta (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. 设区域在第一象限的部分为 D_1. 由对称性知, 所求面积

$$S = 4\iint_{D_1} dx dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2\theta}} \frac{ab}{c^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{ab}{c^2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{ab}{2c^2}.$$

【例 6-17】 用柱坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x^2 + y^2)^2 dx dy dz$, V 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $z = 4$, $z = 16$ 围成;

(2) $\iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2})^3 dx dy dz$, V 由曲面 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geqslant 0$ 围成.

【解】 (1) 作柱坐标变换: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. 则 V 在柱坐标下为 $\{(r,\theta,z) \mid 4 \leqslant z \leqslant 16, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. 从而

$$原式 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_4^{16} dz \int_0^{\sqrt{z}} r^4 \cdot r dr = 5440\pi.$$

(2) 作柱坐标变换：$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, 则三曲面方程分别为 $r = 3$, $r = 4$, $z = r$. 故在柱坐标下 $V = \{(r, \theta, z) \mid 3 \leqslant r \leqslant 4, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant r\}$. 从而

$$原式 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^4 dr \int_0^r r^3 \cdot r dz = \frac{3367}{3}\pi.$$

【例 6-18】 用球坐标变换计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V (x + y + z) dx dy dz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$;

(2) $\iiint\limits_V (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5 dx dy dz$, V 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成；

(3) $\iiint\limits_V x^2 dx dy dz$, V 由 $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 围成.

【解】 (1) 作球坐标变换, V 可表为 $\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. 因此

$$原式 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr = 0.$$

(2) 作球坐标变换, V 可表为 $\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 则

$$\begin{aligned}原式 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^5 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\cos^8\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{32}{9} d\theta = \frac{64\pi}{9}.\end{aligned}$$

(3) 作球坐标变换, 由 $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, $r = 2\sqrt{2}$. 区域 V 可表示为 $\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 则

$$\begin{aligned}原式 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{128}{5}\sqrt{2} \cos^2\theta \sin^3\varphi d\varphi = \left(\frac{256\sqrt{2}}{5} - \frac{64}{3}\right)\pi.\end{aligned}$$

【例 6-19】 求下列各曲面所围成立体的体积：

(1) $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y = x^2$;

(2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ a>0,\ b>0,\ c>0).$

【解】 (1) 区域 V 为：$0\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant x$，$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2$，故

$$V=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{3}{35}.$$

(2) 令 $x=ar\cos^2\theta\sin\varphi$，$y=br\sin^2\theta\sin\varphi$，$z=cr\cos\varphi$ 则有 $|J|=abcr^2\sin 2\theta\sin\varphi$，且 V 可表示为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 1$，于是

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2abcr^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}abc.$$

【例 6-20】 求曲面 $z=\sqrt{2xy}$ 被平面 $x+y=1$，$x=1$ 及 $y=1$ 所截下部分的面积.

【解】 曲面在 Oxy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1,\ x\leqslant 1,\ y\leqslant 1\}$. 故

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{y}{2x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{2y}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{x}}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_x^1\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\left(3\sqrt{x}-4x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

§2 曲线积分与曲面积分

一、基本要求

1. 掌握计算两类曲线积分的方法，掌握两类曲线积分之间的关系.
2. 掌握计算两类曲面积分的方法，掌握两类曲面积分之间的关系.
3. 会用曲线积分和曲面积分表达和计算一些物理量.

二、主要概念和结论

1. 第一型曲线积分及其计算　由曲线构件 L 的质量问题引入第一型(对弧长的)曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i,$$

其中 f 在 L 上有定义且有界, Δs_i 是对 L 任意分割的第 i 段的长度($\Delta s_i > 0$), (ξ_1,η_i,ζ_i) 为 Δs_i 上任取的一点, $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$.

设 L 是光滑曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $f(x,y,z)$ 在 L 连续, 则 $f(x,y,z)$ 在 L 上的第一型曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x,y,z)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

公式右端为定积分, 其积分限总是下限小于上限.

2. 第一型曲面积分及其计算　由计算曲面构件 S 的质量问题引入第一型(对面积的)曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 f 在 S 上有定义且有界, ΔS_i 是对 S 任意分割的第 i 块的面积($\Delta S_i > 0$), (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 ΔS_i 上任取的一点, $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i \text{ 的直径}\}$.

设 S 是光滑曲面 $z = z(x,y)$, $(x,y)\in D$, D 为有界闭区域, $f(x,y,z)$ 在 S 上连续, 则 $f(x,y,z)$ 在 S 上的第一型曲面积分存在, 且

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 第二型曲线积分及其计算　由计算变力沿曲线作功的问题引入第二型(对坐标的)曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i,$$

其中 L 为有向曲线, P, Q, R 在 L 上有定义且有界, Δx_i, Δy_i, Δz_i 分别是对 L 任意分割后的第 i 个有向小弧段在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影, $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 和

λ 同第一型曲线积分.

将上述三个积分相加，简记为$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$. 设 L 的起点为 A，终点为 B，则该积分结果为变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 从 A 点沿曲线 L 到 B 点所作的功. 而上述的每一个积分分别表示 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的分力所作的功.

设 $\overset{\frown}{AB}$ 为光滑曲线段 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$，t 介于 α 与 β 之间，$f(x,y,z)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上连续，且 $t = \alpha$ 对应于 A 点，$t = \beta$ 对应于 B 点，$\overset{\frown}{AB}$ 自身不相交，则 $f(x,y,z)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的第二型曲线积分存在，且

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))y'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

与第一型曲线积分不同，公式右端定积分的下限对应曲线的起点，上限对应曲线的终点，和它们的大小没有关系.

4. 第二型曲面积分　由计算通过曲面的流体的流量问题引入第二型(对坐标的)曲面积分

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta D_i)_{xy},$$

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta D_i)_{yz},$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta D_i)_{zx},$$

其中 S 为光滑的双侧曲面，P, Q, R 在 S 上有定义且有界，$(\Delta D_i)_{xy}$，$(\Delta D_i)_{yz}$，$(\Delta D_i)_{zx}$ 分别是对 S 任意分割的第 i 块小曲面在 Oxy 面、Oyz 面和 Ozx 面上的有向投影，(ξ_i,η_i,ζ_i) 和 λ 同第一型曲面积分.

将上述三个积分相加，简记为$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 该积分结果就是流速为 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 的流体在单位时间内流过曲面 S 的流量. 若 S 的侧的方向和 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致，则结果为正；相反时，结果为负；垂直时，为零.

设 S 是光滑曲面 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，D_{xy} 为有界闭区域，$R(x,y,z)$ 在 S 连续. 则 $R(x,y,z)$ 在 S 上的第二型曲面积分为

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为上侧时取正号，S 为下侧时取负号.

在类似的条件下，设 S：$x=x(y,z)$，$(y,z)\in D_{yz}$，有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 为前侧时取正，S 为后侧时取负.

设 S：$y=y(z,x)$，$(z,x)\in D_{zx}$，有

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 S 为右侧时取正，S 为左侧时取负.

三、常用解题方法与典型例题

【例 6-21】 计算下列第一型曲线积分：

(1) $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 0)$，$B(0,\ 1)$ 为顶点的三角形；

(2) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(3) $\int_L xyz\mathrm{d}s$，其中 L 是曲线 $x=t$，$y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$，$z=\frac{1}{2}t^2(0\leqslant t\leqslant 1)$.

【解】 (1) 原式 $=\int_{AO}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{OB}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{BA}(x^2+y^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y+\int_0^2 x^2\mathrm{d}y+\int_0^1[(2-2y)^2+y^2]\sqrt{5}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}+\frac{5\sqrt{5}}{3}=3+\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

(2) $x'=a(1-\cos t)$，$y'=a\sin t$，$\mathrm{d}s=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$，于是

$$原式=2a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u=\frac{256}{15}a^3.$$

(3) $x' = 1,\ y' = \sqrt{2t},\ z' = t,$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{1 + 2t + t^2}dt = (t + 1)dt,$$

$$\text{原式} = \int_0^1 t\,\frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}t^2(1 + t)dt = \int_0^1 \frac{1}{3}\sqrt{2}t^{\frac{9}{2}}(1 + t)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{11} + \frac{2}{13}\right).$$

【例 6-22】 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$，其中 S 是立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$ 的边界曲面；

(2) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$，$S$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

【解】 (1) 记 S_1 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (0 \leqslant z \leqslant 1)$，$S_2$ 为 $z = 1(x^2 + y^2 \leqslant 1)$. 则 S_1 和 S_2 在 Oxy 面上的投影都为 D：$x^2 + y^2 \leqslant 1$，

$$\text{原式} = \iint\limits_{S_1}(x^2 + y^2)dS + \iint\limits_{S_2}(x^2 + y^2)dS$$

$$= \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy + \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 0 + 0}dxdy$$

$$= (\sqrt{2} + 1)\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = (\sqrt{2} + 1)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 \cdot rdr = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}\pi.$$

(2) 由对称性，有 $\iint\limits_S x^2dS = \iint\limits_S y^2dS = \iint\limits_S z^2dS$，从而

$$\text{原式} = \frac{2}{3}\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS = \frac{2}{3}R^2\iint\limits_S dS = \frac{2}{3}R^2 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi R^4.$$

【例 6-23】 设曲线 L 的方程为 $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$，它在每一点的密度与该点的矢径平方成反比，且在点(1, 0, 1)处为 1，求它的质量.

【解】 设 $\rho = \dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$，则由 $1 = \dfrac{k}{1^2 + 0^2 + 1^2} = \dfrac{k}{2} \Rightarrow k = 2$，从而

$$\rho = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = e^{-2t}(0 \leqslant t \leqslant t_0)，\text{于是}$$

$$M = \int_L \rho ds = \int_L e^{-2t}ds = \int_0^{t_0} e^{-2t}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

$$= \int_0^{t_0} e^{-2t}\sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(1 - e^{-t_0}).$$

【例 6-24】 设有一质量分布不均匀的半圆弧 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta(0 \leqslant \theta$

$\leqslant \pi$)，其线密度 $\rho = a\theta$（a 为常数），求它对原点(0,0)处质量为 m 的质点的引力.

【解】 任取弧长微元 ds，它对原点处质量 m 的质点的引力为 $dF = \frac{km\rho ds}{r^2} \cdot r_0$，其中 k 为引力常数，r_0 是向径的单位向量. 将 $\rho = a\theta$，$ds = rd\theta$ 代入，得 dF 在 x 轴的投影为

$$dF_x = \frac{km}{r^2} \cdot a\theta \cdot rd\theta \cdot \cos\theta = \frac{km}{r} \cdot a\theta\cos\theta d\theta,$$

在 y 轴的投影为

$$dF_y = \frac{km}{r^2} \cdot a\theta \cdot rd\theta \cdot \sin\theta = \frac{km}{r} \cdot a\theta\sin\theta d\theta,$$

故 $F_x = \int_0^\pi \frac{km}{r} \cdot a\theta\cos\theta d\theta = \frac{km}{r} \cdot a\left[\theta\sin\theta\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin\theta d\theta\right] = -2\frac{km}{r} \cdot a,$

$$F_y = \int_0^\pi \frac{km}{r} \cdot a\theta\sin\theta d\theta = \frac{km}{r} \cdot a\left[-\theta\cos\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos\theta d\theta\right] = \frac{km}{r} \cdot a\pi.$$

【例 6-25】 计算球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$x > 0$，$y > 0$，$z > 0$ 的围线的重心坐标. 设线密度 $\rho = 1$.

【解】 线密度为常数，曲线有对称性，只计算重心的 x 坐标即可. 记 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$C(0,0,a)$，再记 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 分别表示球面三角形的三条边. 该球面三角形的质量

$$M = \int_L \rho ds = 3\int_{\overset{\frown}{AB}} \rho ds = 3 \cdot \frac{\pi}{2}a = \frac{3}{2}\pi a.$$

$$x_0 = \frac{\int_L x ds}{M} = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} x ds + \int_{\overset{\frown}{BC}} x ds + \int_{\overset{\frown}{CA}} x ds}{M}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a d\theta + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta d\theta}{M} = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4a}{3\pi}.$$

于是，重心坐标为$\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$.

【例 6-26】 计算下列第二型曲线积分：

(1) $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$，$L$ 为 $y = x^2$ 从(1,1)到(−1,1)；

(2) $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$，$L$ 为以 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(2,1)$，

$D(1,1)$ 为顶点的正方形沿逆时针方向.

【解】 (1) 原式 $=\int_1^{-1}(x^2-2x\cdot x^2)\mathrm{d}x+\int_1^{-1}(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{-1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)\mathrm{d}x=\frac{14}{15}.$$

(2) 方法一

$$\text{原式}=\left(\int_{\overrightarrow{AB}}+\int_{\overrightarrow{BC}}+\int_{\overrightarrow{CD}}+\int_{\overrightarrow{DA}}\right)(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2(x^2+0^2)\mathrm{d}x+\int_0^1(2^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_2^1(x^2+1^2)\mathrm{d}x+\int_1^0(1^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}+\left(4-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{7}{3}-1\right)+\left(-1+\frac{1}{3}\right)=2.$$

方法二 应用格林公式.

$$\text{原式}=\iint_D(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1(2x-2y)\mathrm{d}y=\int_1^2(2x-1)\mathrm{d}x=2.$$

【例 6-27】 计算曲线积分 $\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$.

(1) L 为球面三角形 $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的边界线, 从球的外侧看去, L 的方向为逆时针方向;

(2) L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax\,(a>0)$ 的交线位于 Oxy 平面上方的部分, 从 x 轴上 $(b,0,0)$ $(b>a)$ 点看去, L 是顺时针方向.

【解】 (1) 方法一 围线在 Oxy 平面部分的方程为 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=0$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 根据对称性知,

$$\text{原式}=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta\cdot(-\sin\theta)+(0-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=3\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4.$$

方法二 利用斯托克斯公式, 设 S 为单位球面在第一卦限的部分, 取上侧. 则

$$\text{原式}=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}$$

$$= \iint_S (-2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

S 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta\sin\varphi \\ y=\sin\theta\sin\varphi \\ z=\cos\varphi \end{cases}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$\iint_S (-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = -\frac{4}{3}.$$

由对称性知

$$\iint_S (-2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_S (-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{4}{3}.$$

故
$$\text{原式} = -4.$$

(2) 方法一　L 的参数方程是

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta,\ y=\frac{a}{2}\sin\theta,\ z^2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos\theta,\ (z\geqslant 0).$$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{a^2}{4}\sin^2\theta-\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos\theta\right)\right]\cdot\left(-\frac{a}{2}\sin\theta\right)+\right.$$
$$\left[\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos\theta\right)-\left(\frac{a}{2}\cos\theta+\frac{a}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{a}{2}\cos\theta+$$
$$\left.\left[\left(\frac{a}{2}\cos\theta+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\sin^2\theta\right]\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin^3\theta+\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-2\cos^2\theta-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^3}{4}(-2\pi) = -\frac{\pi a^3}{2}.$$

方法二　利用斯托克斯公式，参见第(1)小题的方法二.

【例 6-28】　求闭曲线 L 上的第二型曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(1) L 为圆 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

(2) L 为以(0,0)为中心，边长为 a，对边平行于坐标轴的正方形，顺时针

方向.

【解】 (1) 令 $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 则

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{a\sin\theta \cdot (-a\sin\theta) - a\cos\theta \cdot (a\cos\theta)}{a^2} d\theta = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

(2) 方法一 正方形的顶点为 $A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $D\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

$$\text{原式} = \left(\int_{\overrightarrow{AD}} + \int_{\overrightarrow{DC}} + \int_{\overrightarrow{CB}} + \int_{\overrightarrow{BA}}\right) \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{-\left(-\frac{a}{2}\right) dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2} dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2} dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2} dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$= 8\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4} + t^2} dt = 2\pi.$$

方法二 以原点为圆心, 充分小的正数 $\epsilon < \frac{a}{2}$ 为半径作圆 l, 逆时针方向. 这时 l 完全包含在此正方形内部. 在 L 与 l 之间的区域 D 上, $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ 和 $Q(x,y) = -\frac{-x}{x^2+y^2}$ 都有连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 应用格林公式及(1), 则

$$\oint_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \left(\oint_L + \oint_l\right)\left(\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}\right) - \oint_l \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$$= -\iint_D 0 dx dy - \oint_l \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = -(-2\pi) = 2\pi.$$

【例 6-29】 对力场 $\boldsymbol{F}$ 对运动的单位质点所作的功, 此质点沿曲线 L 从 A 点运动到 B 点:

(1) $\boldsymbol{F} = (x - y, y - z, z - x)$, L 的矢量形式为 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$;

(2) $\boldsymbol{F} = (y^2, z^2, x^2)$, L 的参数式为 $x = \alpha\cos t$, $y = \beta\sin t$, $z = \gamma t$ (α, β, γ 为正数), $A(\alpha,0,0)$, $B(\alpha,0,2\pi\gamma)$.

【解】 (1) $W = \int_L (x - y)dx + (y - z)dy + (z - x)dz$

$$= \int_0^1 (t - t^2)dt + \int_0^1 (t^2 - t^3) \cdot 2t dt + \int_0^1 (t^3 - t) \cdot 3t^2 dt$$

$$= \int_0^1 (t - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 3t^3)\mathrm{d}t = \frac{1}{60}.$$

(2) $W = \int_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{2\pi} [\beta^2\sin^2 t \cdot (-\alpha\sin t) + \gamma^2 t^2 \cdot (\beta\cos t) + \alpha^2\cos^2 t \cdot \gamma]\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi} (-\alpha\beta^2\sin^3 t + \beta\gamma^2 t^2\cos t + \alpha^2\gamma\cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi\alpha^2\gamma.$$

【例 6-30】 设 P, Q, R 在 L 上连续，L 为光滑弧段，弧长为 l，证明

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml.$$

其中
$$M = \max_{(x,y,z)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\}.$$

【证明】

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| = \left|\int_L P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant \int_L |P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma|\mathrm{d}s.$$

应用柯西不等式，

$$|P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma| \leqslant \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}$$

$$= \sqrt{P^2+Q^2+R^2} \leqslant \max_{(x,y,z)\in L}|\sqrt{P^2+Q^2+R^2}| = M,$$

故
$$\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| \leqslant M\int_L \mathrm{d}s = Ml.$$

【例 6-31】 设光滑闭曲线 L 在光滑曲面 S 上，S 的方程为 $z = f(x,y)$，曲线 L 在 Oxy 平面上的投影曲线为 l，函数 $P(x,y,z)$ 在 L 上连续，证明

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \oint_l P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x.$$

【证明】 任给 l 一个任意的分法T，分点为 m_0, m_1, $\cdots$, m_n ($m_0 = m_n$)．第 i 个小弧 $\widehat{m_{i-1}m_i}$ 对应空间曲线 L 上第 i 个小弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$．在小弧 $\widehat{m_{i-1}m_i}$ 上任取一点 $A_i(\xi_i,\eta_i,0)$，在第 i 个小弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上有对应的点 $A_i^*(\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i))$．于是

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i))\Delta x_i$$

$$= \oint_l P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x.$$

【例 6-32】 计算 $I = \int_L xyz\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 与 $y = z$ 相交的圆，其方向按曲线依次经过 1，2，7，8 卦限．

【解】 L 在 Oxz 平面上的投影曲线为 l：$x^2+2z^2=1$，其方向是逆时针方向．由例 6-31 得

$$I=\oint_l x\cdot z\cdot z\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\cos4\theta}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

【例 6-33】 计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$S$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截部分的外侧；

(2) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面的外侧；

(3) $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧．

【解】 (1) 方法一　由于 S 垂直于 Oxy 平面，故 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$．将 S 分为前半柱面 S_1：$x=\sqrt{1-y^2}$(取前侧)和后柱面 S_2：$x=-\sqrt{1-y^2}$(取后侧)．对于 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，因 S_1 和 S_2 在 Oyz 面上的投影为 D：$-1\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 3$，故

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_D-\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^3\mathrm{d}z\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=3\pi.$$

由对称性知，$\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=3\pi$，从而原式 $=6\pi$．

方法二　由于 S 垂直于 Oxy 平面，故 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$．$S$ 的参数方程为 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$z=z$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant 3$，$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta$．将 S 分为前半柱面 S_1：$x=\sqrt{1-y^2}$(取前侧)和后半柱面 S_2：$x=-\sqrt{1-y^2}$(取后侧)．则

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{S_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^3 \cos\theta\cdot|\cos\theta|\,\mathrm{d}z - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^3\cos\theta\cdot|\cos\theta|\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}z - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\cdot(-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}z$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi,$$

由对称性知，$\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 3\pi$. 从而原式 $= 6\pi$.

方法三　用高斯公式. 设 S_1 为 $z=0\ (x^2+y^2\leqslant 1)$ 的下侧，S_2 为 $z = 3(x^2+y^2\leqslant 1)$ 的上侧，则 S、S_1 和 S_2 一起构成一个封闭曲面，记它们围成的空间闭区域为 V，利用高斯公式，得

$$\oiint_{S+S_1+S_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_V (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\cdot 3\pi = 9\pi.$$

而
$$\iint_{S_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint_{S_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D_{xy}} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\pi,$$

其中 D_{xy}: $x^2+y^2\leqslant 1$. 故

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 9\pi - 3\pi = 6\pi.$$

(2) 设平面 $x+y+z=1$ 与 x 轴，y 轴和 z 轴的交点分别为 A、B 和 C，对于 $\iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由面 AOC 和面 BOC 垂直于 Oxy 面，故 $\iint_{\triangle AOC} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\triangle BOC} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，从而有 $\iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\triangle AOB} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\triangle ABC} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} x\cdot 0\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} x\cdot(1-x-y)\mathrm{d}y = \int_0^1\frac{1}{2}x(1-x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1(x - 2x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$，根据对称性，原式 $=\frac{1}{8}$.

(3) 方法一　S 的参数方程为$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$ $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}-a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi\\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=-a^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

对于$\iint\limits_S z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，将 S 分为上半球面 S_1 的上侧，下半球面 S_2 的下侧，则

$$\iint\limits_S z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\varphi)^3\cdot|-a^2\sin\varphi\cos\varphi|\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(a\cos\varphi)^3\cdot|-a^2\sin\varphi\cos\varphi|\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi+2\pi a^5\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{5}\pi a^5.$$

由对称性知：$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\iint\limits_S y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi a^5$. 从而原式 $=\frac{12}{5}\pi a^5$.

方法二　利用高斯公式.

$$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

【例 6-34】　设某流体的流速为 $\boldsymbol{v}=(k,y,0)$，求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$的内部流过球面的流量.

【解】　流量 $Q=\iint\limits_S k\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 利用高斯公式，

$$Q=\iiint\limits_V(0+1+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi\cdot2^3=\frac{32}{3}\pi.$$

§3　各种积分之间的联系

一、基本要求

1. 掌握格林公式、高斯公式、斯托克斯公式，会用它们计算曲线积分、曲

面积分.

2. 掌握平面曲线积分与路径无关的条件，会求全微分的原函数.

二、主要概念和结论

1. 格林公式　设 D 是由逐段光滑的闭曲线 L 所围成的平面闭区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，L 是 D 的取正向的整个边界，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

2. 高斯公式　设 V 是由分片光滑的双侧闭曲面 S 所围成的空间闭区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 V 上有一阶连续偏导数，S 的方向为外侧，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 斯托克斯公式　设光滑曲面 S 的边界为光滑曲线 L，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在曲面 S 和曲线 L 上有一阶连续偏导数，则

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

其中 S 的侧和 L 的方向符合右手法则.

为了便于记忆，常把它写成如下形式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

4. 积分与路径无关　设 D 是平面单连通区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则下列四个命题等价：

(1) 对于任一完全属于 D 内的逐段光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

(2) 对于任一完全属于 D 内的逐段光滑曲线 L，曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与

路径无关，而只与曲线 L 的起点和终点有关；

(3) 微分式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分；

(4) 等式 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内处处成立.

此定理可以推广到三维空间上.

三、常用解题方法与典型问题

【例 6-35】 应用格林公式计算下列积分：

(1) $\oint_L (x^2 + y^3)\mathrm{d}x - (x^3 - y^2)\mathrm{d}y$，$L$ 为 $x^2 + y^2 = 1$，取正向；

(2) $\oint_L \mathrm{e}^y \sin x \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x} \sin y \mathrm{d}y$，$L$ 为矩形 $a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$ 的边界，取正向.

【解】 (1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2$，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$，故

$$\text{原式} = \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3\iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r = -\frac{3}{2}\pi.$$

(2) 应用格林公式

$$\text{原式} = \iint_D (-\mathrm{e}^{-x}\sin y - \mathrm{e}^y \sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d (-\mathrm{e}^{-x}\sin y - \mathrm{e}^y\sin x)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b [(\cos d - \cos c)\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^d - \mathrm{e}^c)\sin x]\mathrm{d}x$$

$$= (\cos c - \cos d)(\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a}) + (\cos b - \cos a)(\mathrm{e}^d - \mathrm{e}^c).$$

【例 6-36】 利用格林公式计算曲线 $x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$，$y = a\sin^2 t\cos t$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 所围图形的面积.

【解】 在曲线上，$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = a(1 + \cos^2 t)\sin t\,\mathrm{d}(a\sin^2 t\cos t) - a\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}[a(1 + \cos^2 t)\sin t] = a^2(2\sin^2 t - 3\sin^4 t)\mathrm{d}t$.

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(2\sin^2 t - 3\sin^4 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi - \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\pi a^2.$$

【例 6-37】 利用高斯公式求积分 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

(1) S 为立方体 $0 \leqslant x,y,z \leqslant a$ 的边界曲面，外侧；

(2) S 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，下侧.

【解】 $P=x^2,\ Q=y^2,\ R=z^2$.

(1) 原式 $=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(2x+2y+2z)\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a[(2x+2y)a+a^2]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a[(2ax+a^2)a+a^3]\mathrm{d}x=3a^4.$$

(2) 设 $\Sigma=S+S_1$，其中 S_1 为 $z=h(x^2+y^2\leqslant h^2)$ 的上侧，由高斯公式，

$$\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V 2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h(r\cos\theta+r\sin\theta+z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi h^4.$$

而 $\iint\limits_{S_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^4$，因此

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

【例 6-38】 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中

(1) L 为 $x+y+z=1$ 与三坐标轴的交线，其方向与所围平面区域上侧构成右手法则；

(2) L 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx,\ x^2+y^2=2rx(0<r<R,\ z>0)$，它的方向与所围曲面的上侧构成右手法则.

【解】 (1) 原式 $=\iint\limits_S(2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=3\iint\limits_{D_{xy}}(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2x-2y)\mathrm{d}y=0.$$

(2) 注意到球面的法线的方向余弦为：$\cos\alpha=\frac{x-R}{R}$，$\cos\beta=\frac{y}{R}$，$\cos\gamma=\frac{z}{R}$，故

$$\text{原式}=2\iint\limits_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$=2\iint\limits_S\left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S=2\iint\limits_S(z-y)\mathrm{d}S$,

而 $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=\iint\limits_S R\cos\beta\mathrm{d}S=R\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$（$S$ 关于 xOy 平面对称），$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\iint\limits_S R\cos\gamma\mathrm{d}S=R\pi r^2$. 故原式 $=2\pi Rr^2$.

【例 6-39】 设 L 为平面上闭曲线，l 为平面上任意固定方向，证明

$$\oint_L\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})\mathrm{d}s=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 L 的外法线方向.

【证明】 不妨取 L 的方向为逆时针，以 $\boldsymbol{\tau}$ 表示 L 任一点处的切向量，且 $\boldsymbol{\tau}$ 和 L 方向一致，记 $\gamma=(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})$，$\alpha=(\boldsymbol{l},\ x)$，$\beta=(\boldsymbol{n},\ x)$，则 $\gamma=\alpha-\beta$，$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，而 $\sin\alpha=\sin\left[(\boldsymbol{\tau},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{\tau},\ x)$，$\cos\beta=\cos\left[(\boldsymbol{\tau},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{\tau},x)$，且 $\cos(\boldsymbol{\tau},\ x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$，$\sin(\boldsymbol{\tau},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$. 因此 $\cos\gamma\mathrm{d}s=\cos\alpha\mathrm{d}y-\sin\alpha\mathrm{d}x$. 由格林公式，$\oint_L\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}s=\oint_L[-\sin\alpha\mathrm{d}x+\cos\alpha\mathrm{d}y]=\iint\limits_S 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

【例 6-40】 设 S 是封闭曲面，l 为任意固定方向，证明

$$\oiint\limits_S\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0.$$

【证明】 设 $\boldsymbol{l}_1^0=(a,b,c)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量，$\boldsymbol{n}_1$ 是外法线的单位向量，$\boldsymbol{n}_1=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$，则 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma$，应用高斯公式

$$\text{原式}=\oiint\limits_S(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【例 6-41】 求 $I=\oint_L[x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s$，$L$ 为包围有界区域 D 的光滑闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

【解】 不妨设 L 取逆时针方向，切线方向的单位向量为 $\boldsymbol{\tau}$ 与 L 一致，即从 $\boldsymbol{n}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\boldsymbol{\tau}$，则 $(\boldsymbol{n},x)=(\boldsymbol{\tau},y)$，$(\boldsymbol{n},y)=\pi-(\boldsymbol{\tau},x)$，故 $\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{\tau},y)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$，$\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}s=-\cos(\boldsymbol{\tau},x)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x$，因此 $I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2S$，其中 S 表示 D 的面积.

【例 6-42】 证明高斯积分

$$\oint_L \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s = 0,$$

其中 L 是平面上一单连通区域 σ 的边界，而 r 是 L 上一点到 σ 外某一定点的距离，$\boldsymbol{n}$ 是 L 的外法线方向. 又若 r 表示 L 上一点到 σ 内某一定点的距离，则这个积分之值等于 2π.

【证明】 不妨设平面上某一定点的坐标为 (ξ,η). 由 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{r},x)-(\boldsymbol{n},x)$ 得

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) &= \cos(\boldsymbol{r},x)\cos(\boldsymbol{n},x)+\sin(\boldsymbol{r},x)\sin(\boldsymbol{n},x)\\ &= \frac{\xi-x}{r}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\eta-y}{r}\sin(\boldsymbol{n},x),\end{aligned}$$

代入高斯积分，得

$$\begin{aligned}I &= \oint_L \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s = \oint_L\left[\frac{\eta-y}{r^2}\sin(\boldsymbol{n},x)+\frac{\xi-x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)\right]\mathrm{d}s\\ &= \oint_L \frac{\xi-x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{\eta-y}{r^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

令 $P=-\frac{\eta-y}{r^2}$，$Q=\frac{\xi-x}{r^2}$，$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 若 (ξ,η) 是 σ 外的一点，则 P，Q 在 σ 上有连续的偏导数，并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 利用格林公式，$I=0$.

若点 (ξ,η) 在 σ 内，在 σ 内以点 (ξ,η) 为圆心，充分小的 $R>0$ 为半径作一圆 l，使得 $l\subset\sigma$，方向为顺时针方向，则

$$\oint_{L+l}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s = I-\oint_l \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s = 0.$$

从而

$$I=\oint_l \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_l \frac{1}{R}\mathrm{d}s = 2\pi.$$

【例 6-43】 计算高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S,$$

其中 S 为简单封闭光滑曲面，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 处的外法线方向，$r=|\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{r}=(\xi-x)\boldsymbol{i}+(\eta-y)\boldsymbol{j}+(\zeta-z)\boldsymbol{k}$. 对下列两种情形进行讨论：

(1) 曲面 S 包围的区域不含 (x,y,z) 点；

(2) 曲面 S 包围的区域含 (x,y,z) 点.

【解】 设法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$.

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha + \cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta + \cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma.$$

$$= \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma$$

因此，高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint_S \frac{\xi - x}{r^3}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + \frac{\eta - y}{r^3}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + \frac{\zeta - z}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

这里 $$P = \frac{\xi - x}{r^3},\ Q = \frac{\eta - y}{r^3},\ R = \frac{\zeta - z}{r^3}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},\ \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5},\ \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点(x,y,z)处不连续，因此

(1) 当曲面 S 不包围(x,y,z)时，$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$，由高斯公式有

$$\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d} = 0;$$

(2) 当曲面 S 包围(x,y,z)时，则以点(x,y,z)为中心，ϵ 为半径作一球 V_ϵ 包围在 S 内，此球面记以 S_ϵ，将高斯公式用于 $V - V_\epsilon$ 上，即得

$$\iint_{S+S_\epsilon} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^3}\mathrm{d}S = 0.$$

因 $$\iint_{S_\epsilon} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S = \iint_{S_\epsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}S = -4\pi,$$

故得 $$\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S = 4\pi.$$

【例 6-44】 利用高斯公式变换积分

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是曲面的外法线方向余弦.

【解】 $$\text{原式} = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 6-45】 计算下列曲面积分：

(1) $\iint_S (x + \cos y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y + \cos z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z + \cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是立体 Ω

的边界面外侧，而立体 Ω 由 $x+y+z=1$ 和三坐标面围成；

(2) $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，其中 $\boldsymbol{F}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向，S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 上侧.

【解】 (1) 由高斯公式，

$$\text{原式}=\iiint\limits_V(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}.$$

(2) 设 S_1 为 $z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的下侧，记 $\Sigma=S+S_1$，V 是 Σ 所包围的立体，则

$$\iint\limits_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0.$$

$$\iint\limits_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_2^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi a^5.$$

【例 6-46】 证明由曲面 S 所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

【证明】 由高斯公式，

$$\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V.$$

【例 6-47】 若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 S，求

$$\oint_L\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

其中 L 依正向进行.

【解】 由斯托克斯公式，

$$\text{原式}=\oint_L(z\cos\beta-y\cos\gamma)\mathrm{d}x+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\mathrm{d}y+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S 2\cos\alpha\, dydz + 2\cos\beta\, dzdx + 2\cos\gamma\, dxdy$$

$$= \iint_S 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)dS = 2S.$$

【例 6-48】 设 P, Q, R 有连续偏导数，且对任意光滑闭曲面 S，有

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0.$$

证明
$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

【证 明】 用反证法. 假设 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$, 不妨设 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} > 0$. 根据连续函数的性质，存在闭区域 V_0，使得$(x_0, y_0, z_0) \in V_0$，且 $\forall (x, y, z) \in V_0$，都有$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} > 0$. 则

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{V_0}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz > 0,$$

其中 S 是 V_0 的外表面，矛盾.

【例 6-49】 验证下列积分与路径无关，并求它们的值：

(1) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿在右半平面的路径；

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$，其中 φ, ψ 为连续函数；

(3) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$.

【解】 (1) $P = \frac{y}{x^2}$, $Q = \frac{1}{x}$，当 $x > 0$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，从而积分与路径无关，故

$$原式 = \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(\frac{-y}{x}\right) = \frac{-y}{x}\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{2}{3}.$$

(2) 令 $F(x, y) = \int_2^x \varphi(u)du + \int_1^y \psi(v)dv$，则 $F'_x(x, y) = \varphi(x)$，$F'_y(x, y) = \psi(y)$，并且这些偏导数是连续的，因此 $F(x, y)$ 可微，且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = \varphi(x)dx + \psi(y)dy,$$

故积分与路径无关，

$$原式 = F(x, y)\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = \left(\int_2^x \varphi(u)du + \int_1^y \psi(v)dv\right)\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)}$$

$$=\int_2^1\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_1^2\psi(v)\mathrm{d}v.$$

(3) 由于 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)=x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$，故此积分与路径无关，

$$原式=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=-\frac{7}{12}-53=-53\frac{7}{12}.$$

【例 6-50】 求下列全微分的原函数：

(1) $(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$；

(2) $\frac{a}{z}\mathrm{d}x+\frac{b}{z}\mathrm{d}y+\frac{-by-ax}{z^2}\mathrm{d}z$.

【解】 (1) 设 $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x$，$Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$. 易知 P, Q 在全平面上有连续的偏导数，且 $\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 因此积分与路径无关.

方法一 $原式=(2x\cos y\mathrm{d}x-x^2\sin y\mathrm{d}y)+(-y^2\sin x\mathrm{d}x+2y\cos x\mathrm{d}y)$

$$=\mathrm{d}(x^2\cos y)+\mathrm{d}(y^2\cos x)=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\sin x),$$

故
$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C.$$

方法二
$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y+C\\&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+C\\&=x^2\cos y+y^2\cos x+C.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_1^x P(x,1,1)\mathrm{d}x+\int_1^y Q(x,y,1)\mathrm{d}y+\int_1^z R(x,y,z)+C_1\\&=\int_1^x a\mathrm{d}x+\int_1^y b\mathrm{d}y+\int_1^z\frac{-by-ax}{z^2}\mathrm{d}z+C_1\\&=\frac{ax+by}{z}+C,\text{其中 }C=C_1-a-b.\end{aligned}$$

【例 6-51】 求 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是不经过原点的简单闭曲线，取正向. 设 L 围成的区域为 D.

(1) D 不包含原点；

(2) D 包含原点在其内部.

【解】 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) D 不包含原点时，由格林公式，$I=0$；

(2) D 包含原点时，以原点为圆心，充分小的正数 ϵ 为半径作圆 l，使得 l

完全包含在 D 的内部，取逆时针方向，则

$$I=\left(\oint_L+\oint_l\right)\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\right)-\oint_l\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0+\oint_l\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0.$$

【例 6-52】 求

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(x-2)^2+y^2}+\frac{y}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{-(2+x)}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y,$$

其中 L 是不经过$(-2,0)$和$(2,0)$点的简单闭曲线.

【解】 设 L 围成的区域为 D.

① 若 D 不含$(-2,0)$，$(2,0)$，由于

$$P=\frac{y}{(x-2)^2+y^2}+\frac{y}{(x+2)^2+y^2},\quad Q=\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{-(2+x)}{(2+x)^2+y^2},$$

则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{(x-2)^2-y^2}{[(x-2)^2+y^2]^2}+\dfrac{(x+2)^2-y^2}{[(x+2)^2+y^2]^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，由格林公式有 $I=0$；

② 若 D 不含$(-2,0)$，而含$(2,0)$，则 $I=2\pi$(正向)或 -2π(负向)；

③ 若 D 不含$(2,0)$，而含$(-2,0)$，则 $I=2\pi$(负向)或 -2π(正向)；

④ 若 D 既含$(2,0)$又含$(-2,0)$，则 $I=4\pi$(负向)或 -4π(正向).

【例 6-53】 设 $u(x,y)$ 在单连通区域 D 上有二阶连续偏导数，证明在 D 内$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$的充要条件是对 D 内的任一光滑闭曲线L，都有$\oint_L\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$，其中$\dfrac{\partial u}{\partial n}$为$L$ 沿外法线方向的方向导数.

【证明】 必要性. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos(n,y),$$

又
$$\cos(n,x)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,\ \cos(n,y)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,$$

故
$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\right)=\iint_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

充分性. 由$\oint_L\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$，即$\iint_D\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

【例 6-54】 计算积分

$$I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 L 是从点$A(-1,0)$到$B(1,0)$的一条不通过原点的光滑曲线，它的方程是 $y=f(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

【解】 令 $P(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$，则 P 和 Q 的定义域为 $D=\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$，P,Q 在 D 有连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 又因 L 不过原点，故 $f(0)>0$ 或 $f(0)<0$. 若 $f(0)>0$，则 L 上的积分等于沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 上半圆周 l 从 A 到 B 的积分，于是

$$I=\int_l \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_\pi^0[(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta=\pi.$$

同理若 $f(0)<0$，有 $I=-\pi$. 因此 $I=\begin{cases}\pi, & f(0)>0\\ -\pi, & f(0)<0\end{cases}$.

§4 综合例题

【例 6-55】 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

分析 本题考查空间第二型曲线积分的计算. 已给的空间曲线若化为参数形式，应分段计算，给计算带来复杂性. 当然想到用斯托克斯公式.

【解】 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 Oxy 坐标面上的投影，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-24.$$

【例 6-56】 （复旦大学 1999 年）计算 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，沿曲面的下侧.

【解】 设 S_1 为 $z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$ 取上侧，则

$$\text{原式}=\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}=2\iiint_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(r\cos\theta + r\sin\theta + z)\mathrm{d}z - \pi$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{2}{5}\right)\mathrm{d}\theta - \pi = \frac{8}{5}\pi - \pi = \frac{3}{5}\pi.$$

【例 6-57】 （复旦大学　1998 年）设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$，沿逆时针方向，求积分

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

【解】 设 l 为 $x^2+4y^2=\varepsilon^2\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，沿顺时针方向，则原式 $=\oint_{L+l}+\int_{-l}=I_1+I_2$. 由格林公式，$I_1=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 令 $x=\varepsilon\cos\theta$，$y=\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta$，则

$$I_2=\int_{-l}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon\left(\varepsilon\cos\theta-\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta\right)\sin\theta+(\varepsilon\cos\theta+2\varepsilon\sin\theta)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

故原式 $=I_1+I_2=2\pi$.

【例 6-58】 （复旦大学　2000 年）计算积分 $\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}.$$

【解】 作变换 T^{-1}：$u=\sqrt{x}$，$v=\sqrt{y}$，则 $x=u^2$，$y=v^2$，且 D 在 T^{-1} 下变成了 $\Delta=\{(u,v)\mid u\geqslant 0, v\geqslant 0,\ u+v\leqslant 1\}$，$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{matrix}2u & 0\\ 0 & 2v\end{matrix}\right|=4|uv|$，故

$$\text{原式}=\iint\limits_\Delta(u+v)\cdot 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=4\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}uv(u+v)\mathrm{d}v$$

$$=4\int_0^1\left[\frac{u^2(1-u)^2}{2}+\frac{u(1-u)^3}{3}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{u^5}{5}-u^3+u^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}.$$

【例 6-59】（南开大学 1999 年）计算积分 $I=\int_{\widehat{AB}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 $\widehat{AB}$ 是从 $A(0,-1)$ 到 $B(0,1)$ 的右半单位圆周.

【解】记 $\overline{BA}$ 为从 $A(0,-1)$ 到 $B(0,1)$ 的有向线段，则

$$I=\oint_{\widehat{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\oint_{\widehat{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}=I_1+I_2,$$

由格林公式

$$I_1=\iint_D(e^x\cos y-e^x\cos y+m)dxdy=m\iint_D dxdy=\frac{1}{2}m\pi.$$

而

$$I_2=\int_{\overline{AB}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}(\cos y-m)dy=2(\sin 1-m).$$

故

$$I=\frac{m\pi}{2}+2\sin 1-m.$$

【例 6-60】（大连理工大学 2000 年）计算曲面积分

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy,$$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

【解】由高斯公式，$I=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 Ω 为封闭曲面 S 所围的区域. 令

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi.$$

则

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi,$$

$$I_1=\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta abcr^2\sin\varphi dr$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\int_0^1 r^4dr=a^3bc\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}a^3bc\pi.$$

由对称性知，

$$I_2=\iiint_\Omega y^2dxdydz=\frac{4}{15}ab^3c\pi,\ I_3=\iiint_\Omega z^2dxdydz=\frac{4}{15}abc^3\pi,$$

故 $I=3(I_1+I_2+I_3)=3\cdot\frac{4}{15}abc\pi(a^2+b^2+c^2)=\frac{4}{5}abc\pi(a^2+b^2+c^2)$.

【例 6-61】设函数 $f(x)$ 在$[0,a]$上连续. 证明

$$\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant a\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a xf(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 作变换 $u=x+y$, $v=x-y$, 则区域 $x+y\leqslant a$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 在此变换下变为由 $u=a$, $u=v$, $u=-v$ 围成的区域D, 且 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$, 故

$$\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant a\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(u)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}u\int_{-u}^u f(u)\mathrm{d}v = \int_0^a uf(u)\mathrm{d}u.$$

【例 6-62】 (厦门大学 2001 年) 计算 $I=\oint_C (y+z)\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$, 其中 C 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$的交线从 z 轴正向去看按逆时针方向.

【解】 $P=y+z$, $Q=z$, $R=y$, 由斯托克斯公式,

$$I=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 由于 S 在 Oxy 平面上的投影为 D_{xy}: $\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, 故 $\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi R^2}{4}$. 由对称性知, $\iint\limits_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$. 故 $I=-\dfrac{\pi R^2}{4}$.

【例 6-63】 (西安交大) 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 计算积分

$$\oiint\limits_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体表面外侧.

【解】 记 $P=x^3$, $Q=\dfrac{1}{z}f\left(\dfrac{y}{z}\right)+y^3$, $R=\dfrac{1}{y}f\left(\dfrac{y}{z}\right)+z^3$, 由高斯公式,

$$原式=\iiint\limits_\Omega(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}\Omega=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{93(2-\sqrt{2})}{5}\pi.$$

【例 6-64】 设 $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$, 计算 $I=\int_a^A\mathrm{d}x\int_b^B f(x,y)\mathrm{d}y$.

【解】 $I = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B \mathrm{d}x = \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]\mathrm{d}x$

$$= [F(x,B) - F(x,b)]\Big|_a^A$$

$$= F(A,B) - F(A,b) - F(a,B) + F(a,b).$$

【例 6-65】 已知 $F(t) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 求 $F'(t)$.

【解】 作变换 $x = t\xi$, $y = t\eta$, 则有

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1}} \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

于是 $F'(t) = 2t\iint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1}} \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \frac{2}{t}\cdot t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1}} \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \frac{2}{t}\cdot F(t).$

【例 6-66】 设 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 邻域内连续, 且 $f(0,0) = 1$, 令

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\text{求}\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{t}.$$

【解】 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则 $F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.
由 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 的邻域内连续, 故

$$F'(t) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f(t\cos\theta, t\sin\theta)t\mathrm{d}\theta.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi} f(t\cos\theta, t\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi f(0,0) = 2\pi.$$

【例 6-67】 计算曲线积分$\int_C y^2\mathrm{d}s$, 其中 C 为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\y+z=a\end{cases}$.

【解】 先求出 C 的参数方程, 把 $y + z = a$ 代入$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 中得

$$x^2 + 2\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

由此得 C 的参数方程为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin\theta,\ z = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi],$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}t)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta,$$

原式 $= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin\theta\right)^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{a^3}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^3}{4\sqrt{2}}.$

第七章　数项级数与函数项级数

级数理论是数学分析的重要组成部分，它与极限理论有着十分密切的关系，是数学分析重要的理论方法之一，是研究函数的有效工具.

§1　数项级数

一、基本要求

1. 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数、p - 级数的收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性判别法，掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
4. 理解一般项级数的绝对收敛、条件收敛的概念，掌握柯西收敛原理、狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

二、主要概念和结论

1. 给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，称 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，S 为其和. 若数列 $\{S_n\}$ 不收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 柯西收敛原理　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathrm{N}^+$，有 $\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，$\exists n_0 > N$，$p_0 \in \mathrm{N}^+$，使得

$$\left| u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p_0} \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

3. 级数收敛的必要条件　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

4. 正项级数收敛性判别法　设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

(1) 比较判别法：若对充分大的 n(即 $\exists N \in \mathbf{N}^+$, $\forall n > N$), 有 $u_n \leqslant cv_n \left(或 \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$, 其中 $c > 0$ 为常数，则(ⅰ)当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；(ⅱ)当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

比较判别法的极限形式　若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(ⅰ)当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(ⅱ)当 $l = 0$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(ⅲ)当 $l = +\infty$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

(2) 柯西判别法(根值判别法)　设 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$(或 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l$), 则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 达朗贝尔判别法(比值判别法)　设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, 则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 柯西积分判别法　设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 非负，连续，单调下降，$u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(5) 拉阿比判别法　设 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = S$, 则当 $S > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $S < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 任意项级数收敛性判别法

(1) 莱布尼茨判别法　设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad (u_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$ 中的数列 $\{u_n\}$ 单调下降趋向于 0, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 即绝对收敛的级数必收敛.

(3) 狄利克雷判别法　设(ⅰ)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列 $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ 有界，即 $\exists M>0$，使得 $|B_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，(ⅱ)数列 $\{a_n\}$ 单调趋向于0，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(4) 阿贝尔判别法　设(ⅰ)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，(ⅱ)数列 $\{a_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-1】　若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 但反之不成立，举例说明.

【证明】　由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，于是 $\exists N\in \mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而，当 $n>N$ 时，$a_n^2<a_n$，由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. 反之不真. 例如：取 $a_n=\frac{1}{n}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【例 7-2】　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 各项都是正的，把级数的项经过组合而得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$，即

$U_{n+1}=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}}$，$n=0,1,2,\cdots$，其中 $k_0=0$，$k_0<k_1<\cdots<k_n<\cdots$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 收敛，证明原来的级数也收敛.

分析　从数列的角度分析其实质. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 的部分和数列分别为 $\{S_n\}$ 和 $\{T_n\}$，则数列 $\{T_n\}$ 是单调增加数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 若一个单调数列有一个收敛的子数列，则该数列必收敛. 从而当 $\{T_n\}$ 收敛时，$\{S_n\}$ 必收敛，

即 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

【证明】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛，记其和为 S，设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，故 $\forall n \in \mathrm{N}^+$，$\exists n_0 \in \mathrm{N}^+$，使 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{i=1}^{n_0} U_i < S$. 显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立，于是，$\{S_n\}$ 单调上升且有界，因此 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【例 7-3】 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$a_{n+1} \leqslant a_n (n = 1,2,\cdots)$，求证 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

分析　当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，a_n 为无穷小量，本题考察 a_n 趋向于 0 的速度是否比 $\frac{1}{n}$ 快.

【证明】 方法一　由条件知，$\forall n, m \in \mathrm{N}^+$，$n > m$，

$$(n - m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < r_m,$$

其中 r_m 为该收敛级数的余和，由此得 $na_n < \frac{n}{n - m} r_m$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists m_0 \in \mathrm{N}^+$，使 $r_{m_0} < \varepsilon$. 由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n - m_0} = 1$，故存在正整数 $n_0 (n_0 > m_0)$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，$\frac{n}{n - m_0} < 2$. 于是 $\forall n \geqslant n_0$，有 $0 \leqslant na_n < 2\varepsilon$，因此 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

方法二　因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由柯西收敛原理知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，$\forall n > N$，$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon/2$ 及 $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} < \varepsilon/2$. 因为 $\{a_n\}$ 单调下降，故 $0 \leqslant na_n < \varepsilon$，因此 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

注　(1) 同理可证若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调，则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

(2) 仅由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛不能推出 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 例如，设

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2, k = 1,2,\cdots \\ \frac{1}{n}, & n = k^2, k = 1,2,\cdots \end{cases},$$

则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，但$\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$.

【例 7-4】 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$也收敛.

【证明】 ① 因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$收敛，由于$|a_n b_n| \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$，从而$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$也收敛. ② 由$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n$收敛. 又$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，所以，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$收敛. ③ 设$b_n = \frac{1}{n}$，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，由①知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$收敛.

【例 7-5】 已知两正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，问$\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$两级数的收敛性如何？

【解】 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$可能收敛也可能发散. 例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2}$及$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2}$皆发散，但是$\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n) = 0 + 0 + \cdots 0 + \cdots$收敛. 又如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$及$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$皆发散，但是$\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$也发散. $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$一定发散. 事实上，$\max(u_n, v_n) \geqslant u_n \geqslant 0$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$发散.

【例 7-6】 若数列$\{na_n\}$有极限，$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛.

【证明】 方法一 设$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$，$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k-1})$，通过计算得

$$T_n = -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n = -S_{n-1} + na_n.$$

从而 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = -\lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} na_n$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

方法二　因 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，由柯西收敛原理知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > m > N_1$，

$|(m+1)(a_{m+1} - a_m) + (m+2)(a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})| < \varepsilon$，

即 $|-(m+1)a_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_{n-1} + na_n| < \varepsilon$. 又数列 $\{na_n\}$ 的极限存在，不妨设 $\lim_{n\to\infty} na_n = a$，于是，对上述 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > N_2$，有 $|na_n - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则 $\forall n > m > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|-(m+1)a_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_{n-1} + na_n| \\
=\ &|-a_m - a_{m+1} - \cdots - a_{n-2} - a_{n-1} + na_n - ma_m| \\
\geqslant\ &|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1}| - |na_n - ma_m|,
\end{aligned}$$

所以，$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1}| < \varepsilon + |na_n - ma_m| \leqslant \varepsilon + |na_n - a| + |ma_m - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$，由柯西收敛原理知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

注　(1) 由证明过程可知，在数列 $\{na_n\}$ 有极限的条件下，$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 同理可证若数列 $\{na_n\}$ 有极限，$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(3) 特别有(见例 7-48)，设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 由例 7-3 的注(1)可知，条件可改为：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调，结论仍成立.

【例 7-7】　求证若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

【证明】　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛，从而

$a_{n+1}-a_1\to A$，所以$\{a_n\}$有界，设$|a_n|\leqslant M$. 又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由柯西收敛原理知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}^+$，有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\frac{\varepsilon}{1+M}$，$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k+1}|<1$. 记$S_{n+i}=\sum\limits_{k=n+1}^{n+i}b_k(i=1,2,\cdots,p)$，则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|&=|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\&=|S_{n+1}a_{n+1}+(S_{n+2}-S_{n+1})a_{n+2}+\cdots+(S_{n+p}-S_{n+p-1})a_{n+p}|\\&=|S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+S_{n+p}a_{n+p}|\\&\leqslant|S_{n+1}||a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|S_{n+p-1}||a_{n+p-1}-a_{n+p}|+\\&\quad|S_{n+p}||a_{n+p}|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{1+M}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}|+|a_{n+p}|\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{1+M}(1+M)=\varepsilon,\end{aligned}$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

【例 7-8】 利用柯西收敛原理判别下列级数的敛散性：

(1) $a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n+\cdots$，$|q|<1$，$|a_n|\leqslant A(n=0,1,2,\cdots)$；

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

【解】 (1) $\forall p\in\mathbf{N}^+$，有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=|a_nq^n+a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p-1}q^{n+p-1}|\\&\leqslant A(|q|^n+|q|^{n+1}+\cdots+|q|^{n+p-1})\\&=A|q|^n(1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{p-1})\\&=A|q|^n(1-|q|^p)/(1-|q|)<\frac{A}{1-|q|}|q|^n.\end{aligned}$$

故$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{\ln M\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$，其中$M=\frac{1-|q|}{A}$，则当$n>N$时，$\forall p\in\mathbf{N}^+$，都有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. 由柯西收敛原理知，原级数收敛.

(2) 取$\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，$\forall N\in\mathbf{N}^+$，取$n_0=3N$，$p_0=3n_0$，这时$n_0>N$，而

$$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=\left|\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}-\frac{1}{n_0+3}+\frac{1}{n_0+4}+\frac{1}{n_0+5}-\frac{1}{n_0+6}+\cdots+\frac{1}{4n_0-2}+\frac{1}{4n_0-1}-\frac{1}{4n_0}\right|$$

$$>\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+4}+\cdots+\frac{1}{4n_0-2}\geqslant\frac{n_0}{4n_0}=\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

由柯西收敛原理知，原级数发散.

【例 7-9】 对数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，定义 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$，求证：

(1) 如果$\{S_n\}$有界，$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$收敛，且 $b_n\to 0(n\to\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛，且有$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\cdot\Delta b_n$；

(2) 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

【证明】 (1) 设$\{S_n\}$有界，则 $\exists M>0$，$|S_n|\leqslant M$，$\forall n\in \mathrm{N}^+$. 又$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}-b_n|$收敛，且 $b_n\to 0$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathrm{N}^+$，有$\sum_{k=n+1}^{n+p}|b_{k+1}-b_k|<\frac{\varepsilon}{3M}$，$|b_n|<\frac{\varepsilon}{3M}$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right| &= |a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\ &= |(S_{n+1}-S_n)b_{n+1}+(S_{n+2}-S_{n+1})b_{n+2}+\cdots+\\ &\quad (S_{n+p}-S_{n+p-1})b_{n+p}|\\ &= |-S_nb_{n+1}+S_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2})+\cdots+\\ &\quad S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})+S_{n+p}b_{n+p}|\\ &\leqslant |S_nb_{n+1}|+[|S_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2})|+\cdots+\\ &\quad |S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})|]+|S_{n+p}b_{n+p}|\\ &< M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\cdot\Delta b_n$.

(2) 证明完全类似于例 7-7.

【例 7-10】 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

【证明】 方法一 $\forall n\in\mathrm{N}^+$，$\exists k\in\mathrm{N}^+$，使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$. 故

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = \frac{k+1}{2},$$

从而$\{S_n\}$无上界，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．

方法二　取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall n \in \mathbf{N}^+$，取$n_0 = N+1$，$p_0 = n_0$，这时$n_0 > N$，而

$$\left|S_{n_0+p_0} - S_{n_0}\right| = \left|\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots \frac{1}{n_0+n_0}\right| \geqslant \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

由柯西收敛原理知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．

方法三　由拉格朗日中值定理，$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} < \frac{1}{n}$ $(0<\theta<1)$．从而$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) \to +\infty \quad (n\to\infty)$，由定义知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．

【例 7-11】　求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx\,(|r|<1)$．

分析　适当选取a，利用S_n和aS_n的组合，建立关于S_n的方程，求出S_n，再求S_n的极限．

【解】　(1) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}$，

$$2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2n-1}{2^n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和为 3.

(2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} r^k \cos kx$，$2r\cos x S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2r^{k+1}\cos x \cos kx$，

$$2r\cos x S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k+1}[\cos(k+1)x + \cos(k-1)x]$$
$$= [r^{n+1}\cos(n+1)x + S_n - r\cos x] + [r^2 + r^2 S_n - r^{n+2}\cos nx],$$

故 $S_n = \dfrac{r^{n+2}\cos nx - r^{n+1}\cos(n+1)x + r\cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x} \to \dfrac{r\cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}(n \to \infty)$，

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$ 的和为 $\dfrac{r\cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}$.

类似可得，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx(|r|<1)$ 的和是 $\dfrac{r\sin x}{1 + r^2 - 2r\cos x}$.

【例 7-12】 讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$； (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$； (6) $\dfrac{3}{1} + \dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 4} + \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7} + \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \cdots$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$.

【解】 (1) $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln\ln n}$，当 n 充分大时，$\dfrac{1}{n^{\ln\ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$，由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(2) 由于 $\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} < \dfrac{n^2}{n^n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^n}$ 收敛，由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}}{2^n\dfrac{\pi}{3^n}}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\dfrac{\pi}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，由比较判别法之极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}}=2>1$，由柯西判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$发散.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e>1$，由达朗贝尔判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$发散.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}\,\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)(3n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)(2n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+3}=\dfrac{2}{3}<1$，由达朗贝尔判别法知，级数$\dfrac{3}{1}+\dfrac{3\cdot5}{1\cdot4}+\dfrac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7}+\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\cdots$收敛.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln n^{-\frac{1}{n}}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散.

(8) 当$0<a<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1\neq0$，由级数收敛的必要条件知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$发散；当$a=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$，显然发散；当$a>1$时，$\dfrac{1}{1+a^n}<\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$收敛，由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$收敛.

【例 7-13】 讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$的收敛性.

【解】 取$f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$，它在$[9,+\infty)$非负，单调下降，连续.$f(n)=\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$. 又$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_9^x\dfrac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln\ln\ln x-\ln\ln\ln 9)=+\infty$，由柯西积分判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$发散.

【例 7-14】 讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}$.

【解】 (1) $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$，数列 $u_n=\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 单调下降趋向于 0，$\forall n\in N^+$，$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，由狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛.

(2) 由于$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=(-1)^n$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ 收敛.

【例 7-15】 讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}(a>0)$.

【解】 (1) 令 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin n\cdot\sin n^2$，则$\{a_n\}$单调下降趋于0，且 $\forall n\in N^+$，$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[\cos k(k-1)-\cos k(k+1)]\right|=\left|\frac{1}{2}[\cos 0-\cos n(n+1)]\right|\leqslant 1$，由狄利克雷判别法知，原级数收敛.

(2) 令 $a_n=\frac{1}{3^n}$，$b_n=\sin\frac{n\pi}{2}$，则

$$|B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|=\left|\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\sin\frac{3\pi}{2}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1.$$

又数列$\{a_n\}$单调趋向于 0，由狄利克雷判别法知，原级数收敛.

(3) 令 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，$a_n=\frac{a}{1+a^n}(a>0)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且数列$\{a_n\}$单调有界，由阿贝尔判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}(a>0)$ 收敛.

【例 7-16】 设正项数列$\{x_n\}$单调上升且有上界，求证 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

【证明】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}$. 又$\{x_n\}$单调上升有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，从而$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛. 而$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$单调下降有界，由阿贝尔判别

法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛．

【例 7-17】 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$的收敛性(绝对或条件收敛)．

【解】 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big/\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$发散，根据比较判别法的极限形式，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right|$发散．已知交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$收敛，而数列$\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}=\left\{1+\frac{1}{n+1}\right\}$单调下降有下界．由阿贝尔判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$收敛．从而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$条件收敛．

【例 7-18】 判断下列级数的收敛性(绝对或条件收敛)：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$．

【解】 (1) 由于$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}\Big/\frac{1}{n^p}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，① 当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$绝对收敛；② 当$p\leqslant 0$时，原级数显然发散；③ 当$0<p\leqslant 1$时，将通项改写为$\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$．由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$当$0<p\leqslant 1$时条件收敛，而$\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right\}$单调上升($n>4$)且趋于1，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛．但因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$当$0<p\leqslant 1$时发散，故当$0<p\leqslant 1$时，原级数条件收敛．

(2) 令$a_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}\sin x)^2}{\sqrt[n]{n}}=(\sqrt{2}\sin x)^2$，故 ① 当$\sqrt{2}\sin^2x<1$，即当$|x-n\pi|<\frac{\pi}{4}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛；② 当$\sqrt{2}\sin^2x=1$，即当$|x-n\pi|=\frac{\pi}{4}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$条件收敛；③ 当$\sqrt{2}\sin^2x>1$时，可选取$a$，使$\sqrt{2}\sin^2x>a>1$．当$n$充分大时，有$\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant a$或$|a_n|\geqslant a^n>1$．上式表明，当$n\to\infty$时，$a_n$不趋于0，故此时原级数发散．

【例 7-19】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛性.

【解】 将通项改写为 $(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛. 下面证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 其部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \frac{\cos 2k}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 2k}{2k} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2\cos 4k}{4k} = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}.$$

但级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4k}{2k}$ 均收敛, 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 与 $S^{(2)}$, 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

【例 7-20】 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}(p > 0)$.

【解】 (1) 由公式 $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)(x \to 0)$ 知

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}} + o\left(\frac{\ln n}{n^2 + 1}\right),$$

于是有 $\lim_{n\to\infty} a_n / \frac{\ln n}{n^2 + 1} = 1$. 因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$ 的收敛性知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$ 收敛.

(2) 方法一 设 $a_n = \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$, 则 $a_n > 0$. 由于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}$, 故 $a_n = [\mathrm{e}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)})]^p = \mathrm{e}^p\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p$. 从而 $\lim_{n\to\infty} a_n / \frac{1}{n^p} = \frac{\mathrm{e}^p}{2^p}$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leqslant 1$ 时发散.

方法二 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$, 所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

因此$\lim_{n\to\infty} a_n / \frac{1}{n^p} = \frac{e^p}{2^p}$. 故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$当$p>1$时收敛，当$p\leqslant 1$发散.

(3) $$a_n = \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-\frac{p\cdot(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

① 当$0<p\leqslant 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$及$\sum_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$均绝对收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$条件收敛；② 当$p>1$时，由$\lim_{n\to\infty}|a_n|/\frac{1}{n^p}=1$，知原级数绝对收敛. 综上所述，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$当$0<p\leqslant 1$时条件收敛，当$p>1$时绝对收敛.

【例 7-21】 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$的敛散性.

【解】 令$h=\frac{1}{n}$.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]$$
$$= \frac{1}{e}\,\frac{(1+h)^p(1+h)^n - e}{h}$$
$$= \frac{1}{e}\,\frac{(1+h)^p\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}-e\right]}{h} + \frac{(1+h)^p-1}{h}$$
$$= \frac{1}{e}(1+h)^p\cdot\frac{\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}-e\right]}{h} + \frac{(1+h)^p-1}{h}.$$

当$h\to 0$时，$(1+h)^p\to 1$，$\frac{\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}-e\right]}{h}\to -\frac{e}{2}$，$\frac{(1+h)^p-1}{h}\to p$，故$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = p-\frac{1}{2}$. 由拉阿比判别法知，当$p>\frac{3}{2}$时，级数收敛；当$p<\frac{3}{2}$时级数发散；当$p=\frac{3}{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{3}{2}}}$. 因为$\frac{a_n}{a_{n+1}}=$

$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} =$

$e^{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，由高斯判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{3}{2}}}$ 发散.

§2　函数项级数

一、基本要求

1. 理解函数序列与函数项级数的一致收敛的概念.
2. 掌握函数项级数一致收敛性判别法.
3. 掌握和函数的分析性质.

二、主要概念和结论

1. 一致收敛的定义　设函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 与 $f(x)$ 都在区间 I 有定义. 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)$. 它有等价叙述：函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)\Leftrightarrow$ 数列 $\rho_n\to 0(n\to\infty)$，其中 $\rho_n=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$.

函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 不一致收敛于 $f(x)\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbf{N}^+$，$\exists n_0>N$，及 $x_0\in I$，满足 $\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|\geqslant \varepsilon_0$.

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $S(x)$，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$. 用 $\varepsilon-N$ 语言叙述为：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon$，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$. 它有等价叙述：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于 $S(x)\Leftrightarrow$ 数列 $\rho_n\to 0(n\to\infty)$，其中 $\rho_n=\sup\limits_{x\in I}|R_n(x)|=\sup\limits_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|$.

2. 柯西收敛原理　函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall p\in \mathbf{N}^+$，$\forall x\in I$，有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$.

函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$不一致收敛$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，$\forall N\in \mathbf{N}^+$，$\exists n_0>N$，$p_0\in \mathbf{N}^+$，及$x_0\in I$，满足$\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}u_k(x_0)\right|\geqslant \varepsilon_0$.

3. 一致收敛性判别法

(1) M-判别法(魏尔斯特拉斯判别法)　设在区间I上$|u_n(x)|\leqslant M_n$　$(n=1,2,\cdots)$，且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛.

(2) 狄利克雷判别法　设（i）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$的部分和函数序列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\right\}$在区间$I$一致有界，即$\exists M>0$，$\forall x\in I$，$\forall n\in \mathbf{N}^+$，有$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant M$；（ii）对每个固定的$x\in I$，$\{a_n(x)\}$是单调数列；（iii）$\{a_n(x)\}$在区间$I$一致收敛于0. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在区间$I$一致收敛.

(3) 阿贝尔判别法　（i）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$在区间$I$一致收敛；（ii）$\{a_n(x)\}$在区间$I$一致有界；（iii）对每个固定的$x\in I$，$\{a_n(x)\}$是单调数列. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在区间$I$一致收敛.

4. 和函数的分析性质

(1) 和函数的连续性　若$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间I连续，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛于$S(x)$，则和函数$S(x)$在区间$I$连续.

(2) 逐项积分　若$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$连续，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$S(x)$，则$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$.

(3) 逐项求导　若 $u_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 在区间 I 有连续的微商 $u'_n(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 逐点收敛于 $S(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于 $\sigma(x)$，则 $S(x)$ 在区间 I 可导，且 $S'(x)=\sigma(x)$，即 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

三、常用解题方法与典型例题

【例7-22】（大连理工大学　2000年）　证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛，但在 $[\delta, +\infty)$ 一致收敛，这里 δ 是任意正数.

【证明】　由于 $\rho_n = \sup_{x\in(0,+\infty)} u_n(x) = \sup_{x\in(0,+\infty)} n\mathrm{e}^{nx} \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \not\to 0$，故 $|u_n(x)|$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于0，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛. $\forall x \in [\delta, +\infty)$，当 n 充分大时，有 $0 < n\mathrm{e}^{-nx} \leqslant n\mathrm{e}^{-n\delta} \leqslant \frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，由 M- 判别法知，该级数在 $[\delta, +\infty)$ 一致收敛.

注　证明一致收敛性的主要方法：

(1) 先求极限函数或和函数，然后按定义证明.

(2) 应用等价叙述，考察数列 ρ_n 是否趋于 0，其中 $\rho_n = \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ 或 $\rho_n = \sup_{x\in I}|R_n(x)| = \sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|$.

(3) 用三个基本判别法：M- 判别法，狄利克雷判别法，阿贝尔判别法.

(4) 一致收敛性的柯西原理.

(5) 利用结论：若 $|u_n(x)|$ 在区间 I 不一致收敛于0，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 不一致收敛.

【例7-23】　讨论函数序列 $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性.

【解】　$\forall x \in [0, +\infty)$，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-nx})}{n} = 0$；$\forall x \in (-\infty, 0)$，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-nx}) = -x$. 故 $f(x) =$

$\begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

① 当 $x \in [0, +\infty)$ 时，$\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \frac{1}{n}\ln(1 + e^{-nx})$，由于当 $x \geqslant 0$，$0 \leqslant \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx}) \leqslant \frac{1}{n}e^{-nx} = \frac{1}{ne^{nx}} \to 0 \quad (n \to \infty)$，所以 $\rho_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

② 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$g(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx}) + x = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx}) + \frac{1}{n}\ln e^{nx} = \frac{1}{n}\ln(1+e^{nx})$，故 $g(x) > 0$，且 $g'(x) = \frac{1}{n}\frac{ne^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调上升，从而 $0 < g(x) < g(0) = \frac{1}{n}\ln 2 \to 0 \quad (n \to \infty)$，故 $\rho_n = \sup\limits_{x\in(-\infty,0)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(-\infty,0)} g(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$，从而 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

【例 7-24】 讨论下列函数列的一致收敛性：

(1) $f_n(x) = \arctan nx \,(0 < x < \infty)$；

(2) $f_n(x) = x\arctan nx \,(0 < x < \infty)$.

【解】 (1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}(0 < x < +\infty)$. 但 $f_n(x) = \arctan nx$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于 $\frac{\pi}{2}$. 事实上，取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall N \in N^+$，取 $n_0 = N + 1$，$x_0 = 1/n_0$，则 $n_0 > N$，$x_0 \in (0, +\infty)$，但 $\left|f_{n_0}(x_0) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan 1 - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{4} > \varepsilon_0$.

(2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x(0 < x < +\infty)$. 下面证明 $f_n(x) = x\arctan nx$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛于 $\frac{\pi}{2}x$. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时，由 $\varphi_n(x) = \left|f_n(x) - \frac{\pi}{2}x\right| = \frac{\pi x}{2} - x\arctan nx$，$\varphi'_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan nx - \frac{nx}{1+(nx)^2}$，$\varphi''_n(x) = -\frac{2n}{(1+n^2x^2)^2} < 0$，从而 $\varphi'_n(x)$ 单调下降，又由 $\varphi'_n(0) = \frac{\pi}{2} > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'_n(x) = 0$ 可得 $\varphi'_n(x) > 0$，因此 $\varphi_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调上升，而 $\varphi_n(0)$

$= 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \arctan nx}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-n}{1+n^2x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \dfrac{1}{n}$. 故 $0 <$ $\varphi_n(x) < \dfrac{1}{n}(0 < x < +\infty)$. 即 $\left|f_n(x) - \dfrac{\pi}{2}x\right| < \dfrac{1}{n}(0 < x < +\infty)(n = 1, 2, \cdots)$. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall x \in (0, +\infty)$, 有 $\left|f_n(x) - \dfrac{\pi}{2}x\right| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

【例 7-25】 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 有连续的导函数 $f'(x)$, 且 $f_n(x) = n\left[f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, 证明 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内闭一致收敛于 $f'(x)$.

【证明】 任取 $[c, d] \subset (a, b)$. 取 $\delta_0 > 0$ 充分小, 使 $[c - \delta_0, d + \delta_0] \subset (a, b)$. 由一致连续性定理(康托定理)知 $f'(x)$ 在 $[c - \delta_0, d + \delta_0]$ 一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x, y \in [c - \delta_0, d + \delta_0]$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$. 取 $N \in \mathrm{N}^+$, 使当 $n > N$ 时, $\dfrac{1}{n} < \min\{\delta, \delta_0\}$. 从而 $\forall x \in [c, d]$, 有 $x + \dfrac{1}{n} \in [c - \delta_0, d + \delta_0]$. 对 $f(x)$ 在区间 $\left[x, x + \dfrac{1}{n}\right]$ 应用拉格朗日中值定理得, $\exists \theta \in \left[x, x + \dfrac{1}{n}\right]$, 使得 $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x) = f'(\theta) \cdot \dfrac{1}{n}$. 于是, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathrm{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall x \in [c, d]$, 有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f'(x)| &= \left|n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] - f'(x)\right| \\ &= |f'(\theta) - f'(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $f_n(x)$ 在 $[c, d]$ 一致收敛, 即 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内闭一致收敛于 $f'(x)$.

【例 7-26】 讨论下列级数的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\dfrac{x}{n}\right)$, $x \in [-\delta, \delta](\delta > 0)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x + n}}(0 < x < \infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^2 \mathrm{e}^{-nx}$, $x \in [0, +\infty)$.

【解】 (1) 因在 $[-\delta, \delta]$ 上, $\left|1 - \cos\dfrac{x}{n}\right| = \left|2\sin^2\dfrac{x}{2n}\right| < 2\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2 \leqslant \dfrac{\delta^2}{2n^2}$(当 n 充分大时), 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由 M- 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\dfrac{x}{n}\right)$ 在

$[-\delta, \delta]$ 一致收敛.

(2) 设 $a_n(x) = \sin x \sin nx$, $b_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+n}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 由 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ 可知, $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx = 2\cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x$, 因此, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| \leqslant 2$. $\forall x \in (0, +\infty)$, $b_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+n}}$ 对每个固定的 $x \in (0, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(0, +\infty)$ 一致收敛于 0, 由狄利克雷判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛.

(3) 方法一　令 $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$, 则 $u_n(x) \geqslant 0$, $u'_n(x) = xe^{-nx}(2 - nx)$, 由 $u'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{n}$. 又当 $0 < x < \dfrac{2}{n}$ 时, $u'_n(x) > 0$, 当 $x > \dfrac{2}{n}$ 时, $u'_n(x) < 0$, 于是 $u_n(x)$ 在 $x = \dfrac{2}{n}$ 处取得最大值. 所以 $|u_n(x)| = u_n(x) \leqslant u_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = 4e^{-2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4e^{-2} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

方法二　由几何级数的求和公式知, 当 $x > 0$ 时, $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}}$, $s(0) = 0$. $\forall n \in \mathbf{N}^+, f_n(x) = s(x) - s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 的一致收敛性等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0. 下面证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛于 0. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = s(x) = \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}}$, $f(0) = 0$. 由于 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} = 0$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, 有 $\dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} < \varepsilon$. 于是, $\forall n \in \mathbf{N}^+$, $\forall x \in (0, \delta)$, 有 $\dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} e^{-nx} < \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} < \varepsilon$. 从而 $\forall n \in \mathbf{N}^+$, $\forall x \in [0, \delta)$, $|f_n(x)| < \varepsilon$. 而当 $\delta \leqslant x < +\infty$ 时, 由 $x < e^x$ 知, $\dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} e^{-nx} < \dfrac{e^{-(n-2)x}}{1 - e^{-x}} < \dfrac{e^{-(n-2)\delta}}{1 - e^{-\delta}} \to 0(n$

$\to\infty$) $(n>2)$. 于是 $\exists N\in\mathrm{N}^+$, $\forall n>N$, $\forall x\in[\delta,+\infty)$, $|f_n(x)|<\varepsilon$. 这样, $\forall n>N$, $\forall x\in[0,+\infty)$, $|f_n(x)|<\varepsilon$. 因此, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$一致收敛.

【例 7-27】 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在$(0,2\pi)$的收敛性、绝对收敛性及一致收敛性.

【解】 当 $x=\pi$ 时, 级数每一项均为0, 级数当然收敛. 设 $x\in(0,2\pi)$, $x\neq\pi$, 这时 $\sin x\neq 0$. 用三角函数积化和差公式得, $2\sin\dfrac{x}{2}\sin x=\cos\dfrac{1}{2}x-\cos\dfrac{3}{2}x$, $2\sin\dfrac{x}{2}\sin 2x=\cos\dfrac{3}{2}x-\cos\dfrac{5}{2}x$, $2\sin\dfrac{x}{2}\sin 3x=\cos\dfrac{5}{2}x-\cos\dfrac{7}{2}x$, ……, $2\sin\dfrac{x}{2}\sin nx=\cos\dfrac{2n-1}{2}x-\cos\dfrac{2n+1}{2}x$.

相加便得 $2\sin\dfrac{x}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\dfrac{1}{2}x-\cos\dfrac{2n+1}{2}x$, 因此, $\forall n\in\mathrm{N}^+$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{\left|\cos\frac{1}{2}x\right|+\left|\cos\frac{2n+1}{2}x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

注意到 $\dfrac{1}{n}$ 单调下降趋于0, 由狄利克雷判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在$(0,2\pi)$收敛.

易知 $\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\dfrac{\sin^2 nx}{n}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{\cos 2nx}{2n}$, 同样应用狄利克雷判别法得, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 nx}{n}$ 发散. 由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|$ 发散. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 非绝对收敛.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$, $\forall N\in\mathrm{N}^+$, 取 $n=N+1$, $p=n$, $x_0=\dfrac{\pi}{4n}$, 则 $n>N$, $x_0\in(0,2\pi)$, $|S_{n+p}(x_0)-S_n(x_0)|=|S_{2n}(x_0)-S_n(x_0)|=\left|\dfrac{\sin(n+1)x_0}{n+1}+\dfrac{\sin(n+2)x_0}{n+2}+\cdots+\dfrac{\sin 2nx_0}{2n}\right|\geqslant\dfrac{n\sin nx_0}{2n}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}>\varepsilon_0$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在$(0,2\pi)$非一致收敛.

注　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[\delta, 2\pi-\delta]$一致收敛，其中$0<\delta<\pi$. 事实上，取$a_n(x)=\frac{1}{n}$，它显然单调下降趋于0，从而在$[\delta,2\pi-\delta]$一致收敛于0. 取$b_n(x)=\sin nx$，则当$x\in[\delta, 2\pi-\delta]$时，由上面推导知，$\forall n\in\mathbf{N}^+$，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{\left|\cos\frac{1}{2}x\right|+\left|\cos\frac{2n+1}{2}x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|},$$

即序列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$在$[\delta, 2\pi-\delta]$一致有界. 根据狄利克雷判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[\delta, 2\pi-\delta]$一致收敛. 即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0, 2\pi)$内闭一致收敛.

【例 7-28】　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a, b]$绝对并一致收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a, b]$是否一致收敛?

【解】　考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$，$0\leqslant x\leqslant 1$，易知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=\frac{x(x-1)}{x+1}$，$0\leqslant x\leqslant 1$. 而$\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(1-x)x^i-\frac{x(x-1)}{x+1}\right|=\frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x}$在$[0, 1]$一致收敛于0，因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0, 1]$一致收敛. 又由$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$绝对收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$的和函数不连续，由一致收敛的性质知，$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0, 1]$不一致收敛.

【例 7-29】　证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$关于$x$在$(-\infty, +\infty)$一致收敛，但对任何$x$并非绝对收敛；而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$虽在$x\in(-\infty, +\infty)$绝对收敛，但并不一致收敛.

【证明】　由于$\forall x\in(-\infty, +\infty)$，$\frac{1}{n+x^2}\leqslant\frac{1}{n}$，因此$\frac{1}{n+x^2}$对每个固

定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 n 是单调的，且在$(-\infty, +\infty)$一致收敛于0. 而 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$，由狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$ 在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

下面讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，它为正项几何级数，公比 $r = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 绝对收敛. 易知和函数 $S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$，于是

$$|S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

由于 $\sup_{x \in (-\infty, +\infty)}|S_n(x) - S(x)| = 1$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty, +\infty)$不一致收敛.

注 (1) 类似可证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty, +\infty)$一致收敛. 事实上，由于 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+(x^2)^n} \leqslant \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}$，从而 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty, +\infty)$一致收敛于0. 而 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$，由狄利克雷判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

(2) 上面几个例子说明了函数项级数的处处收敛性、绝对收敛性与一致收敛性的蕴含关系.

§3 幂级数

一、基本要求

1. 掌握幂级数收敛半径及收敛域的求法.

2. 掌握幂级数的和函数的性质，会求一些幂级数的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

3. 理解函数可展开为泰勒级数的充分必要条件.

4. 掌握一些常用函数的麦克劳林展开式，会用它们将一些函数间接展开成幂级数.

二、主要概念和结论

1. 阿贝尔定理　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1 \neq 0$ 处收敛，则对满足不等式 $|x|<|x_1|$ 的一切点 x，幂级数都收敛且绝对收敛；若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 \neq 0$ 处发散，则对满足不等式 $|x|>|x_2|$ 的一切点 x，幂级数都发散.

由此定理可知，存在 $0<r<+\infty$，使得幂级数在 $|x|<r$ 绝对收敛，在 $|x|>r$ 发散. 这时称 r 为幂级数的收敛半径.

当幂级数只在 $x=0$ 收敛时，自然理解为收敛半径为 0；当幂级数在 $(-\infty,+\infty)$ 每点都收敛时，收敛半径为 $+\infty$.

2. 收敛半径公式　对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（或 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}=\rho$），则（ⅰ）当 $0<\rho<+\infty$ 时，收敛半径 $r=\frac{1}{\rho}$；（ⅱ）当 $\rho=0$ 时，收敛半径 $r=+\infty$；（ⅲ）当 $\rho=+\infty$ 时，收敛半径 $r=0$.

3. 幂级数的内闭一致收敛性　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r，则级数在收敛区间 $(-r,r)$ 内任一闭区间 $[a,b]$ 一致收敛.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内可以逐项求导与逐项积分，且收敛半径不变，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

$x\in(-r,r)$.

5. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有各阶导数，这时称形式为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

的级数为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的泰勒级数. 当 $x_0=0$ 时的泰勒级数称为麦克

劳林级数.

6. 几个常用的麦克劳林级数：

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$;

(5) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$.

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-30】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} x^n$ 的收敛域.

【解】 $r = \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}} = \frac{1}{3}$，当 $x = \frac{1}{3}$ 时，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 发散；当 $x = -\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(1 + \left[\frac{2}{3}\right]^n\right)}{n}$ 收敛. 从而收敛域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

【例 7-31】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} x^{n+1}$ 的收敛半径与收敛域.

【解】 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+2)}{n+2}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$，故收敛半径为 1；当 $x = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散. 当 $x = -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 收敛. 故收敛域为 $[-1, 1)$.

【例 7-32】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径与收敛域.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot(-2)}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n} = 3,$$

故收敛半径为 $\dfrac{1}{3}$.

当 $x+1=\dfrac{1}{3}$，即 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故此时级数发散.

当 $x+1=-\dfrac{1}{3}$ 即 $x=-\dfrac{4}{3}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 均收敛. 于是此时原级数收敛. 故收敛域为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

【例 7-33】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数 $S(x)$.

【解】 $r=\dfrac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，$\forall x\in(-1,1)$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{S(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}=1$. 定义当 $x=0$ 时，$\dfrac{S(x)}{x}=1$. $\forall x\in(-1,1)$，从 0 到 x 逐项积分，有 $\int_0^x\dfrac{S(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(1+2x+3x^2+\cdots)$，从而 $\int_0^x\dfrac{S(t)}{t}\mathrm{d}t=-\dfrac{x}{(1-x)^2}$. 对上式两端求导，得 $\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{(1-x)^2+x\cdot2(1-x)}{(1-x)^4}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$，于是，$S(x)=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，$I=(-1,1)$.

【例 7-34】 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域 I.

【解】 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}y^n$, $r_y = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}y^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 令 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域 $I = [0, \infty)$.

【例 7-35】 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

【解】 $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有

$$(xf(x))'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'' = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

积分一次得 $(xf(x))' = -\ln(1-x)$, 再积分得 $xf(x) = -\int_0^x \ln(1-t)\mathrm{d}t = (1-x)\ln(1-x) + x$, 因此当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$. 又当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 收敛, 于是有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $x \in [-1, 1)$, $f(1) = 1$.

【例 7-36】 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)x^n \quad (a > 0, b > 0)$ 的收敛域 I.

【解】 $\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} = \max\{a, b\}$, $r = \frac{1}{\rho}$, , 收敛区间为 $(-r, r)$. 若 $a \geqslant b$, 当 $x = -r = -\frac{1}{a}$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$, 这是一个条件收敛与绝对收敛级数的和, 因此条件收敛; 当 $x = r$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$ 发散, 故 $I = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$. 若 $a < b$, 当 $x = -r = -\frac{1}{b}$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]$, 这是两个绝对收敛级数的和, 因此绝对收敛.

当 $x = r$ 时，则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]$ 收敛，故 $I = \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]$.

【例 7-37】 求 $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 的麦克劳林级数.

【解】 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= 1 - \frac{3}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n},\ |x|<1.$$

【例 7-38】 求函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 的麦克劳林级数.

【解】 因 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 + \cdots,\ |x|<1$,

故 $\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 - \frac{1}{2}(-2x) + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}(-2x)^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}(-2x)^3 + \cdots$

$$= 1 + x + \frac{1\cdot3}{1\cdot2}x^2 + \frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \cdots,\ |x|<\frac{1}{2},$$

从而 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + x^2 + \frac{1\cdot3}{1\cdot2}x^3 + \frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}x^4 + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},\ |x|<\frac{1}{2}$.

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，交错项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ 收敛 $\left(数列\left\{\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right\}单调下降且趋于0\right)$，当 $x = \frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ 发散. 事实上，$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{2n+1}{2n+2}$,

$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1$，由拉阿比判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$ ·

$\frac{1}{2^{n+1}}$发散. 所以，该展开式的收敛域为 $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

【例 7-39】 求 $J = \dfrac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \cdots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \cdots}$.

【解】 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$, 因 $\frac{J}{\pi^2} = \dfrac{\pi + \frac{\pi^5}{5!} + \frac{\pi^9}{9!} + \cdots}{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \cdots}$, 故

$$\frac{J - \pi^2}{\pi^2} = \frac{\sin\pi}{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \cdots} = 0\text{，所以 } J = \pi^2.$$

§4 傅里叶级数

一、基本要求

1. 理解三角函数系及其正交性的概念，理解函数的傅里叶系数与傅里叶级数的概念.

2. 掌握函数可展开成傅里叶级数的充分条件.

3. 会将定义在$[-\pi, \pi]$或$[-l, l]$上的函数展开成傅里叶级数，会将定义在$[0, l]$上的函数展开成正弦级数和余弦级数.

二、主要概念和结论

1. 傅里叶级数的定义 (1) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数，令

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

称 a_n, b_n 为$f(x)$的傅里叶系数. 称级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$为 $f(x)$ 的傅里叶级数. 记为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积函数，则有下述展开式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

(3) 若 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积偶函数，则 $f(x)$ 可展成余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

若 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积奇函数，则 $f(x)$ 可展成正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

2. 收敛性定理　若函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $[-\pi, \pi]$ 逐段光滑，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $f(x)$ 的连续点收敛到 $f(x)$，在 $f(x)$ 的不连续点(第一类间断或可去间断)收敛到 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

3. 逐项积分定理　若 $f(x)$ 为在 $[-\pi, \pi]$ 上逐段连续的以 2π 为周期的函数，傅里叶级数展开式为 $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$，则对 $\forall x_0$, x，有

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-40】　将周期为 2π 的函数 $f(x) = \pi^2 - x^2(-\pi < x < \pi)$ 展成傅里叶级数.

【解】　由 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中为偶函数，故将 $f(x)$ 作以 2π 为周期的周期延拓，则其傅里叶系数有：$b_n = 0$, $k = 1, 2, \cdots$; $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}\pi^2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi^2 - x^2)\sin nx}{n} - \frac{2x\cos nx}{n^2} + \frac{2\sin nx}{n^3}\right]\Bigg|_0^\pi$$
$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

故 $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$，$x \in (-\pi, \pi)$.

【例 7-41】 展开函数 $f(x) = |x|$，$(-\pi < x < \pi)$ 为傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

【解】 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$，$k = 1, 2, \cdots$；$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \pi a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$，于是

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \cdots\right].$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续、逐段光滑，因此

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \cdots\right],$$

$x \in (-\pi, \pi)$.

令 $x = 0$，即有 $1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

设 $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$，$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots$，

$S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots$，

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots,$$

因为 $S_2 + S_3 = S_1 = \frac{\pi^2}{8}$，$S_2 = \frac{1}{4}S = \frac{1}{4}(S_1 + S_2)$，所以

$$\begin{cases} S_2 + S_3 = \dfrac{\pi^2}{8} \\ 3S_2 - S_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{S_1}{3} = \frac{\pi^2}{24},\ S_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

【例 7-42】 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 可积和绝对可积，证明：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 满足 $f(x + \pi) = f(x)$，则 $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$，$m = 1, 2, \cdots$；

(2) 若 $f(x)$ 在$[-\pi, \pi]$ 满足 $f(x+\pi) = -f(x)$，则 $a_{2m} = b_{2m} = 0$，$m = 1, 2, \cdots$.

【证明】 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$

对第二个积分作变量替换 $x = \pi + t$，则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\pi + t)\cos n(\pi + t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x) + (-1)^n f(\pi + x)]\cos nx\mathrm{d}x.$$

当 $f(\pi + x) = f(x)$ 时，$a_{2m-1} = 0$；当 $f(\pi + x) = -f(x)$ 时，$a_{2m} = 0$.

同理 $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x) + (-1)^n f(\pi + x)]\sin nx\mathrm{d}x.$$

当 $f(\pi + x) = f(x)$ 时，$b_{2m-1} = 0$；当 $f(\pi + x) = -f(x)$ 时，$b_{2m} = 0$.

【例 7-43】 求 $f(x) = \cos ax$ 在$[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数($a \notin \mathrm{N}$)，并证明

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2},\ x \neq m\pi,\ m \in \mathrm{N}.$$

【解】 由于 $f(x) = \cos ax$ 是偶函数，故 $b_n = 0\quad(n = 1, 2, \cdots)$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\mathrm{d}x = \frac{2\sin a\pi}{a\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} + \frac{\sin(n+a)x}{n+a}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}2a\sin\pi a}{(n^2 - a^2)\pi}.$$

于是由 $f(x) = \cos ax$ 的光滑性得，

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}\cos nx\right].$$

§5 综合例题

【例 7-44】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的收敛性.

【解】 由不等式 $\ln(x+1) < x\quad(-1 < x < +\infty,\ x \neq 0)$，可得 $\ln\frac{n+1}{n}$

$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$，故原级数为正项级数．由于 $\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$，因此 $0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$．由比较判别法，故原级数收敛．

注　设此级数的和为 γ，$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，于是有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1) \to \gamma,$$

上式可写成 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + \gamma + \gamma_n$，其中 γ_n 为无穷小量，$\gamma = 0.5772156649\cdots$ 为欧拉常数，此式刻画了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散的级别．

【例 7-45】　设 $a_n \geqslant 0$，且单调下降，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 同时收敛或同时发散．

分析　类似于数列的结论：设数列 $\{a_n\}$ 单调，则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它的一子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛．

【证明】　一方面，$\forall n \in \mathrm{N}^+$，$\exists k \in \mathrm{N}^+$，使得 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$，由 $\{a_n\}$ 的单调性，有

$$\begin{aligned}
& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + a^k a_{2^k},
\end{aligned}$$

另一方面，$\forall k \in \mathrm{N}^+$，$a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}$

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + 2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + \\
&\quad 2(a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) \\
&= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}),
\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 同时收敛或同时发散．

【例 7-46】　讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ 的收敛性．

【解】　令 $a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$．当 $p \leqslant 0$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ 发散．设 $p > 0$，则 $a_n \geqslant 0$，且单调下降．因为 $2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{n^p(\ln 2)^p} \to +\infty\ (n \to \infty)$，由例 7-45 知，

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^p}$ 发散.

【例 7-47】 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 的收敛性.

【解】 方法一 当 $a>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 发散. 设 $0<a<1$，令 $a_n=a^{\ln n}$，则 $a_n\geqslant 0$，且单调下降. 因为 $2^n a_{2^n}=2^n a^{n\ln 2}=(2a^{\ln 2})^n$. 而当 $2a^{\ln 2}<1$，即 $a<\dfrac{1}{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a^{\ln 2})^n$ 收敛，当 $2a^{\ln 2}\geqslant 1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a^{\ln 2})^n$ 发散. 由例 7-45 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 当 $a<\dfrac{1}{e}$ 时收敛，当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时发散.

方法二 令 $a_n=a^{\ln n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}}-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e^{-\ln a\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e^{-\ln a\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln a)\cdot n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{1}{a}$，由拉阿比判别法，当 $\ln\dfrac{1}{a}>1$，即 $a<\dfrac{1}{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 收敛；当 $\ln\dfrac{1}{a}<1$，即 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 发散. 当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，所以发散.

方法三 当 $a>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 发散. 设 $0<a<1$，取 $f(x)=a^{\ln x}$，它在 $[1,+\infty)$ 非负，连续，单调下降. $f(n)=a^{\ln n}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x a^{\ln t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x a^{\ln t}\mathrm{d}t=\begin{cases}-(\ln a e)^{-1}, & a<\dfrac{1}{e}\\ \infty, & a\geqslant\dfrac{1}{e}\end{cases},$$

由积分判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}$ 当 $a<\dfrac{1}{e}$ 时收敛，当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时发散.

注 分别取 $a=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{e}$ 及 $a=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e}$，则得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\ln n}}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛.

【例 7-48】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛，并

且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【证明】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 由柯西收敛原理知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbf{N}^+$, $\forall n > m > N_1$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |a_{m+1} + a_{m+2} \cdots + a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbf{N}^+$, $\forall n > N_2$, 有 $|na_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > m > N$, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n} k(a_k - a_{k+1})\right| &= |(m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) + (m+2)(a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots \\ &\quad + n(a_n - a_{n+1})| \\ &= |(m+1)a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n - na_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+1}| \\ &\leqslant |a_{m+2} + \cdots + a_n + a_{n+1}| + |(m+1)a_{m+1}| + |(n+1)a_{n+1}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1},\end{aligned}$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 可设 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 又 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 故 $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} = S$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【例 7-49】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}(x \geqslant 0)$ 的收敛性.

分析 根据一般项的表达形式, 先求积化简, 然后灵活运用比较判别法.

【解】 当 $x = 1$ 时, $\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = \frac{1}{2^n}$, 原级数收敛.

当 $x \neq 1$ 时, $u_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = \frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$.

(i) 当 $x > 1$ 时, $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}\Big/\frac{1}{x^n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-1}{1-\dfrac{1}{x^{2n}}}=x-1>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$ 收敛，由比较判别法知，原级数收敛．

（ⅱ）当 $x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}\Big/x^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1-x^{2n}}=1-x>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 收敛，由比较判别法知，原级数收敛．

总之，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\ (x\geqslant 0)$ 收敛．

【例 7-50】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}$ 的收敛性．

【解】 由于 $\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}=\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\left(1+\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\right)^{-1}$

$=\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\left[1-\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}+o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)\right]=\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}-\dfrac{\sin^2\frac{n}{4}\pi}{n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)$．当 $2p>1$，即 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，由第二项及第三项所组成的级数均收敛，而对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n}{4}p}{n^p}$，由于 $\{n^{-p}\}$ 单调下降趋于 0，且 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{4}\right|=\left|\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$，$n=1,2,\cdots$，由狄利克雷判别法知，它是收敛的．从而原级数当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛．又因 $\dfrac{\left|\sin\frac{n}{4}\pi\right|}{n^p}\geqslant\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\dfrac{1}{2n^p}-\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p}$，且当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛，故当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left|\sin\frac{n}{4}\pi\right|}{n^p}$ 发散，从而此时原级数条件收敛．

当 $p>1$ 时，由 $\left|\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^p-1}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p-1}$ 收敛，故原级数

绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，由于 $\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} \geqslant \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n} = \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{2n} \geqslant 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散．从而原级数发散.

【例 7-51】 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\frac{1}{n^{\beta}}(\alpha>0,\ \beta>0)$ 的收敛性.

【解】 $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+n}{\alpha+n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+n}{\alpha+n}-1\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{\beta+1}}{1+\alpha x}-1}{x} = \beta+1-\alpha$．故（ⅰ）当 $\beta+1-\alpha>1$ 时，即 $\beta>\alpha$ 时，由拉阿比判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}(\alpha>0,\ \beta>0)$ 收敛．（ⅱ）当 $\beta+1-\alpha<1$，即 $\beta<\alpha$ 时，原级数发散．（ⅲ）当 $\beta=\alpha$ 时　原级数发散.

【例 7-52】 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 的收敛性，其中 $p,\ q>0$.

【解】 易知函数 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$ 当 x 充分大时非负，连续，单调下降．若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q} = \begin{cases}\left.\frac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1\\ \ln\ln\ln x\,\Big|_3^{+\infty}, & q=1\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，当 $q\leqslant 1$ 时发散；故由柯西积分判别法知，原级数当 $p=1$，$q>1$ 时收敛；$p=1$，$q\leqslant 1$ 时发散．若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$，使 $p-\eta>1$，由于 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=$

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\tau}(\ln t)^q}=0$，故积分$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$收敛，从而原级数收敛；当$p<1$时，取$\tau>0$，使$p+\tau<1$．由于$\lim\limits_{t\to\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\tau}}{(\ln t)^q}=+\infty$，故积分$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$发散，从而原级数发散．

综上所述，可知原级数当$p=1$，$q>1$或$p>1$，q为任意数时收敛．

【例7-53】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}\ (0<x<\pi)$的收敛性(绝对收敛或条件收敛)．

【解】 当$p>1$时，由于$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\left|\frac{1}{n^p}\right|\ (0<x<\pi)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，由$M$-判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$绝对收敛；当$0<p\leqslant 1$时，由于$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$单调下降趋于0，且部分和$\sum\limits_{n=1}^{n}\cos nx$有界$(0<x<\pi)$，由狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$收敛．注意到$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\left|\frac{\cos^2 nx}{n^p}\right|=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$当$0<p\leqslant 1$时发散．同样应用狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$收敛，由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p}$当$0<p\leqslant 1$时发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$当$0<p\leqslant 1$时条件收敛；当$p\leqslant 0$时，由级数收敛的必要条件知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$发散．总之，$\forall x\in(0,\pi)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$当$p>1$时绝对收敛，当$0<p\leqslant 1$时条件收敛．

【例7-54】 讨论函数序列$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$在所示区域的一致收敛性：

(ⅰ) $x\in[0,b]$，$b<1$； (ⅱ) $x\in[0,1]$； (ⅲ) $x\in[a,+\infty)$，$a>1$．

【解】 (ⅰ) 当$0<b<1$时，$\forall x\in[0,b]$，有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=0$．$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln b}\right]+1$，则$\forall n>N$，$\forall x\in[0,b]$，有$|f_n(x)-0|=\frac{x^n}{1+x^n}\leqslant x^n<b^n<\varepsilon$．因此$f_n(x)$在$[0,b](b<1)$一致收敛．

（ⅱ）$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$. 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$，$\forall N\in\mathbf{N}^+$，

取 $n_0=N+1$，$x_0=2^{-\frac{1}{n_0}}$，则 $n_0>N$，$x_0\in[0,1]$，$\left|f_{n_0}(x_0)-0\right|=$

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}=\varepsilon_0$，所以 $f_n(x)$ 在$[0,1]$不一致收敛.

（ⅲ）当 $x\in[a,+\infty)$，$a>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=1$. $\forall\varepsilon>0$，取

$N=\left[\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\Big/\ln a\right]+1$，则 $\forall n>N$，$\forall x\in[a,+\infty)$，有 $|f_n(x)-1|=$

$\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\dfrac{1}{1+x^n}<\left(\dfrac{1}{x}\right)^n<\left(\dfrac{1}{a}\right)^n<\varepsilon$. 所以 $f_n(x)$ 在$[a,+\infty)(a>1)$一致收敛.

【例 7-55】 设 $f_1(x)$ 在$[a,b]$黎曼可积，定义函数序列 $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$，求证$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于0.

【证明】 因为 $f_1(x)$ 在$[a,b]$可积，故 $f_1(x)$ 在$[a,b]$有界，即 $\exists M>0$，使得$|f_1(x)|\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$. 于是，$\forall x\in[a,b]$，

$|f_2(x)|\leqslant M(x-a)\leqslant M(b-a)$；

$|f_3(x)|\leqslant M\int_a^x(x-a)\mathrm{d}x=\dfrac{M}{2!}(x-a)^2\leqslant\dfrac{M}{2!}(b-a)^2,\cdots,$

$|f_{n+1}(x)|\leqslant\dfrac{M}{n!}(x-a)^n\leqslant\dfrac{M}{n!}(b-a)^n\cdots,$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n!}(b-a)^n$ 收敛，因此$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于0.

注　这种迭代法估值在常微分方程解的讨论中经常用到.

【例 7-56】 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$，求证：

(1) $f(x)$ 在 $x\geqslant0$ 连续；(2) $f(x)$ 在 $x>0$ 时无穷次可微.

【证明】 (1) 由于$\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+n^2}$，$\forall x\in[0,+\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$收敛，根据 M-判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在$[0,+\infty)$一致收敛. 又每个 $u_n(x)=$

$\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在$[0,+\infty)$连续，故 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在$[0,+\infty)$连续.

(2) $\forall x_0>0$，在$\left[\frac{x_0}{2},+\infty\right)$上，$u'_n(x)=\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$，$\forall n$，$u'_n(x)$ 在$\left[\frac{x_0}{2},+\infty\right)$连续. 由于 $|u'_n(x)|=\left|\frac{-n}{(1+n^2)e^{nx}}\right|\leqslant\frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}$，$\frac{x_0}{2}\leqslant x<\infty$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}$收敛，由 M- 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在$\left[\frac{x_0}{2},+\infty\right)$一致收敛，于是 $f(x)$ 在$\left[\frac{x_0}{2},+\infty\right)$可导，且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$，$\frac{x_0}{2}\leqslant x<\infty$. 特别地，上式在 $x_0>\frac{x_0}{2}$ 成立：$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx_0}}{1+n^2}$. 由 $x_0>0$ 的任意性，就证明了 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$，$0<x<\infty$. 同理可证 $f(x)$ 任意次可导，即证明了 $f(x)$ 在 $x>0$ 时无穷次可微.

【例 7-57】 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<r$ 时收敛，那么当$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}r^{n+1}$收敛时，有$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

【证明】 由幂级数逐项积分定理，当 $|x|<r$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. 因为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$收敛，由阿贝尔第二定理，在上式中令 $x\to r-0$，得$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

【例 7-58】 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$的收敛半径与收敛区域.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$，知其收敛半径为$\frac{1}{e}$.

当 $|x|=\frac{1}{e}$ 时，考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{e^n}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\neq0$. 于是当 $|x|=\dfrac{1}{e}$ 时，原级数发散，从而收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{e}\right)$.

【例 7-59】 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!2^n}x^n$ 的和函数.

【解】 由于 $e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

又 $e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

$e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}$，两边同乘以 $\dfrac{x}{2}$ 得：$\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$，两边对 x 求导得：

$\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}\dfrac{x^{n-1}}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}\dfrac{x^{n-1}}{2^n}$，两边同乘以 x 得：$\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{x^2}{4}e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!2^n}x^n$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!2^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!2^n}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!2^n}=\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{x^2}{4}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}-1=e^{\frac{x}{2}}\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}\right)-1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

【例 7-60】 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}$ 的和函数.

【解】 由于 $\dfrac{1}{1-x^4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{4n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\dfrac{1}{1-x^4}-1,\ |x|<1$. 两边积分，得

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x,\ |x|<1.$$

当 $x\neq0$ 时，两边同时除以 x^2 得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}=\dfrac{\arctan x}{2x^2}+\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{x},\ 0<|x|<1$.

当 $x=0$ 时，原级数为 0.

所以 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{2x^2}+\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$.

【例 7-61】 利用级数计算积分$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$.

【解】 把被积函数展为幂级数$\frac{\ln(1-x)}{x}=-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}-\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，该级数在[0, 1) 是内闭一致收敛的，当 $0<t<1$ 时，有$\int_0^t \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$，两端令 $t\to 1-0$，得$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}$；

【例 7-62】 证明：(1) $\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}=x$，$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

分析 巧妙运用泰勒展开式并借助广义积分来证明级数问题.

【证明】 (1) $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$，$\forall x\in[0, 1]$. 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$x=\arcsin\sin x=\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}$.

(2) $\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}\right|=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$.
由拉阿比判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ 收敛. 根据 M- 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$一致收敛. 对 $\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}=x$ 逐项积分得，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x,$$

从而可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

【例 7-63】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，a_n，b_n 为其傅里叶系数，求卷积函数 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的傅里叶级数，并且利用所得的结

果推出李雅普诺夫等式.

【解】 设 $f(x)$ 的傅里叶展开式为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$,将此级数乘 $f(x+t)$ 并逐项积分得:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}f(x+t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nt\mathrm{d}t +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(a_n\cos nx + b_n\sin nx) + b_n(b_n\cos nx - a_n\sin nx)]$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx.$$

当 $x=0$ 时, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$(李雅普诺夫等式).

第八章　广义积分与含参变量积分

§1　广义积分

一、基本要求

1. 理解无穷限广义积分、瑕积分的概念，熟悉广义积分与无穷级数之间的共同点与差异.

2. 掌握无穷限广义积分、瑕积分的柯西收敛原理，掌握无穷限广义积分、瑕积分的收敛性判别法.

二、主要概念和结论

1. 无穷限广义积分　设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义，并且在任意有限区间 $[a, A]$ 上可积，若极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$，并称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 若极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是发散的. 和无穷级数相仿，称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛. 类似地有结论，绝对收敛的无穷限积分必收敛. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

2. 柯西收敛原理　$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists X > a$，当 $x_1, x_2 > X$ 时，有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall X > a$，$\exists x_1, x_2 > X$，使得

$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0$.

3. 无穷限广义积分收敛性判别法

(1) 比较判别法　设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义，在任何有限区间 $[a, A]$ 可积.

(ⅰ) 若存在数 B，当 $x \geqslant B$ 时，$|f(x)| \leqslant \varphi(x)$，而 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛. 若 $|f(x)| \geqslant \varphi(x) > 0 \quad (x > B)$，而 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

(ⅱ) 若 $\varphi(x) > 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l$，则

当 $0 \leqslant l < +\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛可以推出 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $0 < l \leqslant +\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散可以推出 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

特别地，取 $\varphi(x) = \dfrac{C}{x^p}$ 作比较的标准时，有非常实用的形式：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = l$，则当 $p > 1$，$0 \leqslant l < +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；当 $p \leqslant 1$，$0 < l \leqslant +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 狄利克雷判别法　若 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 有界，即存在 $M > 0$，使 $\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$，$\forall A > a$；$g(x)$ 单调且当 $x \to +\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 0，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 阿贝尔判别法　若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 瑕积分　设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 有定义，在任意区间 $[a+\eta, b]$ 上可积，在 $(a, a+\eta]$ 无界(其中 $\eta > 0$). 若极限 $\lim\limits_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的瑕积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$，并

称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 称 a 为瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的瑕点；若极限 $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

5. 瑕积分的收敛性判别法

(1) 柯西收敛原理　设瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只有惟一的瑕点 a，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $0<\eta'$，$\eta''<\eta$ 时，有 $\left|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

(2) 比较判别法　设瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只有惟一的瑕点 a.

(ⅰ) 若存在 $\delta>0$，当 $a<x<a+\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant\varphi(x)$，而 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；若当 $a<x<a+\delta$ 时，$|f(x)|\geqslant\varphi(x)>0$，而 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

(ⅱ) 若 $\varphi(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l$，则

当 $0\leqslant l<+\infty$ 时，由 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $0<l\leqslant+\infty$ 时，由 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

(3) 狄利克雷判别法　设瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 只有惟一的瑕点 a，$\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 η 的有界函数，$g(x)$ 单调且当 $x\to a$ 时趋向于 0，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 阿贝尔判别法　设瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 只有惟一的瑕点 a，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 单调有界，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

6. 常用的重要结论

(ⅰ) 无穷限积分 $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 收敛，$p\leqslant 1$ 发散($a>0$).

(ⅱ) 瑕积分 $\int_0^b\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p<1$ 收敛，$p\geqslant 1$ 发散.

三、常用解题方法与典型例题

【例 8-1】 求下列无穷积分的值：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$；

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx\ (a>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+p)(x^2+q)}\ (p,\ q>0)$.

【解】 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Bigg|_1^A=\frac{1}{2}\ln2.$$

(2) 设 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx\ (a>0)$，则

$$I=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}\int_0^A\sin bx\,de^{-ax}\right)$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\sin bx\Big|_0^A-b\int_0^Ae^{-ax}\cos bx\,dx\right)\right]$$

$$=-\frac{b}{a^2}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\cos bx\,de^{-ax}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{b}{a^2}\left(e^{-ax}\cos bx\Big|_0^A+b\int_0^Ae^{-ax}\sin bx\,dx\right)\right]$$

$$=\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

(3) 若 $p=q$，

原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+p)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sqrt{p}\tan t)}{(p\tan^2t+p)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{p}\sec^2t\,dt}{p^2\sec^4t}$

$$=\frac{\sqrt{p}}{p^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=\frac{\sqrt{p}\pi}{4p^2}.$$

若 $p\neq q$，

原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{x^2+p}-\frac{1}{x^2+q}\right)dx$

$$= \frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\arctan\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}}\arctan\frac{x}{\sqrt{q}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2(q-p)}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

【例 8-2】 讨论下列无穷积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-1}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\forall x \in [0, +\infty)$，$\frac{1}{1+x|\sin x|} > \frac{1}{1+x}$，而$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散，由比较判别法知，$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 当 $p \leqslant 1$ 时，$\frac{\ln x}{x^p} \geqslant \frac{1}{x}$($x$ 充分大)，而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，由比较判别法知，$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $p > 1$ 时，设 $p = 1+\sigma$ ($\sigma > 0$)，x 充分大时，$\frac{\ln x}{x^{1+\sigma}} < \frac{1}{x^{1+\sigma/2}}$，而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\sigma/2}}\mathrm{d}x$ 收敛，由比较判别法知，$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\ln(1+\cos^2 x)+\ln 2}{x^2} = \frac{1}{2}$，所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的瑕点. 又当 x 充分大时，$\left|\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-1}\right| \leqslant \frac{\sin^2 x}{2x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$，而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

【例 8-3】 讨论积分$\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

【解】 方法一 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2|f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3\arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$，$p=2>1$，由比较判别法知，$\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

方法二 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\arctan x}{1+x^3}\Big/\frac{x}{1+x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$. $\forall x \in [1, +\infty)$，$\frac{x\arctan x}{1+x^3} > 0$. 又$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛，由比较判别法知，$\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

方法三　由于$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$收敛，$\arctan x$在$[1,+\infty)$上单调有界，由阿贝尔判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$收敛.

【例 8-4】　设$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，并且积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 如果仅知道积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，以及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$f(x)\geqslant 0$，是否仍有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$?

【证明】　方法一　由于$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$(不妨设$\delta\leqslant\varepsilon$)，$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又因为$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，对上述$\delta>0$，存在$M>0$，当$x_1,x_2>M$时，有$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|<\frac{\delta^2}{2}$. 于是对所有$x>M$以及$M<x_1\leqslant x\leqslant x_2$，$x_2-x_1=\delta$，有

$$\delta|f(x)|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dt\right|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-f(t)]dt\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\right|$$

$$\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|dt+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2},$$

所以当$x>M$时，$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}\leqslant\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

方法二　反证法. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$，则$\exists\varepsilon_0>0$及数列$\{x_n\}$使$x_n\to+\infty$，$|f(x_n)|>\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$. 不妨设$f(x_n)>\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$. 由于$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，对上述$\varepsilon_0>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_n|<\delta$时，$|f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 从而$f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2}$. 由此$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}f(x)dx>\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\delta=\varepsilon_0\delta$ $(n=1,2,\cdots)$. 这与$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛矛盾. 故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

如果仅有$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，以及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$f(x)\geqslant 0$，则不能推出$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 例如，函数$g(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[n-1,\ n-\frac{1}{n\cdot 2^n}\right)\\ n, & x\in\left[n-\frac{1}{n\cdot 2^n},\ n\right)\end{cases}$，$n=1,2,\cdots$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 不存在，且它在$[0, +\infty)$上无界，然而$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\cdot 2^n}$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

现把 $g(x)$ 稍作修改，使每一狭条长方形顶边的中点与底边的两端分别相连，所得函数 $f(x)$ 即为非负连续函数，且$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ 仍然收敛，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

注　这是广义积分与级数的区别之一，即$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛并不以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 作为其必要条件，即使 $f(x)$ 非负连续也是如此. 那么，在 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的基础上，再添加怎样一些附加条件，便能使 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 呢?本例中的"一致连续"，后面例 8-41 中的"$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在"以及例 8-42 中的"$\int_0^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛"都是一些合适的附加条件.

【例 8-5】　证明若 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上单调下降，且积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

【证明】　不妨设 $a > 0$, $f(x) \geqslant 0$. 由 $f(x)$ 的单调性知，$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{x}{2} f(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$. 因此由$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的柯西原理知，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

注　同理可进一步证明一般情形以及关于瑕积分的情形：

(1) 若 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上单调下降，$a > 0$，且积分$\int_a^{+\infty} x^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{b+1} f(x) = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 在$(0, 1]$上单调下降，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$，且$\int_0^1 x^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{b+1} f(x) = 0$.

【例 8-6】　讨论下列积分的收敛性，若收敛求其值：

(1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 在[0, 1]内只有一个瑕点 $x=1$. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}=1$, $p=\frac{1}{2}<1$, 所以积分$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

令$\sqrt{1-x}=t$, 则$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(-2t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$.

(2) $f(x)=\ln\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内只有一个瑕点 $x=0$. 由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot|\ln\sin x|=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\cdot(\sin x)^{\frac{1}{2}}\cdot|\ln\sin x|=0,$$

所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 下面用两种方法求其值.

方法一
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi\ln2}{2}+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\pi\ln2}{2}+2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

在第二个积分中作变换 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 得$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$. 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$, 因此$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln2}{2}$.

方法二　设 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$. 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则

$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}(-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{2}\ln2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin2x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在最后一个积分中作变换 $t = 2x$ 得,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t \mathrm{d}t\right) = A.$$

于是 $2A = A - \frac{\pi}{2}\ln 2$, $A = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

【例 8-7】 讨论下列无穷积分的收敛性(绝对或条件收敛):

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x \mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\forall A > 1$, $\left|\int_1^A \cos x \mathrm{d}x\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2$, 而 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 $0(x \to +\infty)$, 由狄利克雷判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 注意到

$$\left|\frac{\cos x}{x}\right| \geqslant \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1+\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x},$$

同样应用狄利克雷判别法, 知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散, 因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散, 从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

(2) $\forall A > 1$, $\left|\int_0^A \cos x \mathrm{d}x\right| \leqslant 2$, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调趋于 $0(x \to +\infty)$, 由狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$ 收敛. 注意到 $\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100} \geqslant \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} + \frac{\cos 2x}{x+100}\right)$. 由 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100} = 1$ 知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100}\mathrm{d}x$ 发散. 同样应用狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x+100}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}\mathrm{d}x$ 发散, 于是 $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

(3) $\forall A > 2$, $\left|\int_2^A \sin x \mathrm{d}x\right| \leqslant 2$, $\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 单调趋于 $0(x \to +\infty)$, 由狄利克雷

判别法知，$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛．当 x 充分大时，

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \geqslant \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x} - \frac{\ln\ln x}{\ln x}\cos 2x\right),\ \frac{\ln\ln x}{\ln x} \geqslant \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x},$$

故积分$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\mathrm{d}x$ 发散．同样应用狄利克雷判别法知，$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛，因此$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x\mathrm{d}x$ 发散．用比较判别法得，$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\mathrm{d}x$ 发散．所以$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$ 条件收敛．

【例 8-8】 判别下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$．

【解】 (1) $x_1 = 0$，$x_2 = \pi$ 都是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ 的瑕点，将积分分成两部分

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} + \int_1^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = I_1 + I_2.$$

对于 I_1，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$，所以 I_1 收敛．

对于 I_2，由于 $\lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi - x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin(\pi - t)}} = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$，所以 I_2 收敛，故$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$ 收敛．

(2) $f(x) = \sqrt{\tan x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}$ 在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$内只有一个瑕点 $x = \frac{\pi}{2}$，由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cdot t}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} = \lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{t\cos t}{\sin t}} = 1.$$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$ 收敛．

【例 8-9】 讨论积分$\int_0^1 x^{\alpha}\ln x\mathrm{d}x$ 的收敛性，其中 α 是实数．

【解】 ① 当 $\alpha > 0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = 0$，所以原积分是正常积分.

② 当 $\alpha = 0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}|\ln x| = 0$，原积分收敛.

③ 当 $-1 < \alpha < 0$ 时，令 $p = -\alpha$，则 $0 < p < 1$，取 $q: p < p + q < 1$，即 $0 < q < 1 - p$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{p+q}\left|\dfrac{\ln x}{x^p}\right| = \lim\limits_{x\to 0^+} x^q|\ln x| = 0$，原积分收敛.

④ 当 $\alpha \leqslant -1$ 时，令 $p = -\alpha \geqslant 1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} x^p\left|\dfrac{\ln x}{x^p}\right| = \lim\limits_{x\to 0^+}|\ln x| = +\infty$，故原积分发散.

综上所述，当 $\alpha > -1$ 时原积分收敛，当 $\alpha \leqslant -1$ 时，原积分发散.

【例 8-10】 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$；

(3) $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 在[0, 1]有两个瑕点 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 1$，所以 I_1，I_2 都收敛，故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = I_1 + I_2$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1$，故 I_1 发散. 从而 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ 发散.

(3) 当 $p \geqslant 0$ 时，$f(x) = |\ln x|^p$ 在[0, 1]上只有一个瑕点 $x = 0$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}|\ln x|^p = 0$，故 $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p < 0$ 时，取 $\alpha = -p$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}|\ln x|^p = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|\ln x|^{\alpha}} = 0$，而 $\lim\limits_{x\to 1^-}|\ln x|^p = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{|\ln x|^{\alpha}} = +\infty$，

于是 $f(x)=\dfrac{1}{|\ln x|^{\alpha}}$ 在[0, 1]上只有一个瑕点 $x=1$. 由于

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{1}{|\ln x|^{\alpha}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(-\ln x)^{\alpha}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\alpha(-\ln x)^{\alpha-1}\left(-\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{\alpha(-\ln x)^{\alpha-1}}=\begin{cases}1, & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases},$$

所以, 当 $\alpha\geqslant1$, 即 $p\leqslant-1$ 时, 原积分发散. 而当 $0<\alpha<1$, 即 $-1<p<0$ 时, 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\dfrac{1}{|\ln x|}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{|\ln(1-t)|}=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\alpha}\cdot\dfrac{1}{|\ln x|^{\alpha}}=1$, 于是原积分收敛. 综上所述, 当 $p>-1$ 时 $\int_0^1|\ln x|^p\mathrm{d}x$ 收敛, 当 $p\leqslant-1$ 时 $\int_0^1|\ln x|^p\mathrm{d}x$ 发散.

【例 8-11】 讨论下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^p}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$.

【解】 (1) 若 $p\leqslant0$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}-p}\ln(1+x)=+\infty$, 所以原积分发散. 若 $p>0$, 将积分分为两部分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

对于 I_1, 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{p-1}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 所以 $p-1<1$, 即 $p<2$ 时, I_1 收敛. 对于 I_2, 若 $0<p\leqslant1$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$ 知, 此时 I_2 发散. 若 $p>1$, 取 $\alpha:1<\alpha<p$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{p-\alpha}}=0$ 知, 此时 I_2 收敛.

综上所述, 当 $1<p<2$ 时, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

对于 I_1，由于 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{3}}\left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，所以 I_1 收敛；

对于 I_2，由于 $\lim\limits_{x\to1}|(x-1)^{\frac{2}{3}}|\cdot\left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\right| = 1$，所以 I_2 收敛；

对于 I_3，由于 $\lim\limits_{x\to2}|(x-2)^{\frac{1}{3}}|\cdot\left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，所以 I_3 收敛；

对于 I_4，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} = 1$，所以 I_4 收敛，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$ 收敛.

【例 8-12】 判断积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 的收敛性(条件收敛或绝对收敛).

【解】 令 $x^2 = t$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = I_1 + I_2$.

对于 I_1，由于 $\lim\limits_{x\to0^+} t^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}} = 0$，所以 I_1 收敛. 对于 I_2，$\left|\displaystyle\int_1^A\sin t\mathrm{d}t\right| = |\cos1-\cos A|\leqslant 2$，而 $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ 当 $t\to+\infty$ 时单调下降趋于 0. 由狄利克雷判别法知，I_2 收敛，于是原积分收敛. 注意到 $|\sin x^2|\geqslant\sin^2x^2 = \dfrac{1}{2}(1-\cos2x^2)$，同样应用狄利克雷判别法知，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos2x^2\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2x^2\mathrm{d}x$ 发散，由比较判别法知，$\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin x^2|\mathrm{d}x$ 发散，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 条件收敛.

【例 8-13】 判断积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$ 的收敛性(条件收敛或绝对收敛).

【解】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x - \int_0^1\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$. 积分 $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$ 是以 $x=0$ 为瑕点的瑕

积分．因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$，所以 $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)\right]^{\frac{1}{3}}$ 与 $x^{\frac{2}{3}}$ 同阶，故 $\int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$ 收敛．而 $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} > 0$，所以 $\int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$ 绝对收敛．当 $x > 1$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{x} < 1$，利用 $(1+x)^a$ 的麦克劳林公式得，

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{\sin x}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

已知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛，而 $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ 绝对收敛，所以 $\int_1^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right] dx$ 条件收敛．综上所述，$\int_0^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right] dx$ 条件收敛．

【例 8-14】（东南大学　2003 年）　判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 的收敛性，其中 p 和 q 是参数．

【解】　方法一　$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$．

（i）当 $p = q$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$．当 $p < 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 收敛，当 $p \geqslant 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 发散；当 $p > 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛，当 $p \leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散．所以不论 $p = q$ 取何值，一定有 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散．

（ii）当 $p \neq q$ 时，不妨设 $p < q$，对无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$，由 $\lim_{x \to +\infty} x^q \cdot \frac{1}{x^p + x^q} = 1$ 知，当 $q > 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛；当 $q \leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散．下面讨论当 $q > 1$ 时 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 的收敛性．若 $p \leqslant 0$，则 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 为正常

积分，当然收敛．若 $p>0$，由 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p\cdot\dfrac{1}{x^p+x^q}=1$ 知，当 $0<p<1$ 时，$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛；当 $p\geqslant 1$ 时，$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 发散．

综上所述，当 $p<1<q$ 或 $q<1<p$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛；在其他情况下，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 发散．

方法二 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}=I_1+I_2$.

对于 I_1，不妨设 $\min\{p,q\}=p$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p\dfrac{1}{x^p+x^q}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+x^{q-p}}=1\left(\text{若 } p=q\text{，则该极限为}\dfrac{1}{2}\right)$．所以仅当 $p<1$，即 $\min\{p,q\}<1$ 时，I_1 收敛；

对于 I_2，设 $\max\{p,q\}=q$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^q\dfrac{1}{x^p+x^q}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{p-q}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^{q-p}+1}+1}=1\left(\text{若 } p=q\text{，则该极限为}\dfrac{1}{2}\right)$．所以仅当 $q>1$，即 $\max\{p,q\}>1$ 时，I_2 收敛．

于是，当 $\min\{p,q\}<1$，$\max\{p,q\}>1$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛．

§2　含参变量积分

一、基本要求

1．理解含参变量积分收敛与发散的概念，理解含参变量广义积分与函数项级数之间的共同点与差异．

2．掌握含参变量广义积分的一致收敛判别法．

3．掌握含参变量正常积分、含参变量广义积分的分析性质．

二、主要概念和结论

1．含参变量正常积分 $I(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 的性质

(1) 积分号下取极限及积分交换次序　设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b]\times[c, d]$ 连续，则函数 $I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 在区间 $[a, b]$ 连续，且 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$.

(2) 积分号下求导数　设函数 $f(x, y)$ 及 $f_x(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b]\times[c, d]$ 连续，则函数 $I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 在区间 $[a, b]$ 有连续的导函数，且 $I'(x)=\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y$.

(3) 积分限含参数的情形　设函数 $f(x, y)$ 及 $f_x(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b]\times[c, d]$ 连续，且 $c(x)$, $d(x)$ 在 $[a, b]$ 连续可导，且 $\forall x\in[a, b]$, $c\leqslant c(x)$, $d(x)\leqslant d$. 则 $I(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 连续可导，且

$$I'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y)\mathrm{d}y+f[x, d(x)]d'(x)-f[x, c(x)]c'(x).$$

2. 含参变量广义积分一致收敛的定义　设 $f(x, y)$ 定义在 $[a, b]\times[c, +\infty)$，且 $\forall x\in[a, b]$，无穷积分 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 收敛. 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists A_0>c$，使当 $A>A_0$ 时，$\forall x\in[a, b]$，有 $\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，则称含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

定义中的区间 $[a, b]$ 可代之以开区间、半开区间、无穷区间等.

含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 不一致收敛 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$, $\forall A_0>c$, $\exists A>A_0$ 及 $x_0\in[a, b]$，使得 $\left|\int_A^{+\infty} f(x_0, y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0$.

3. 柯西收敛原理　$\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists A_0>c$，当 A', $A''>A_0$ 时，$\forall x\in[a, b]$，有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$.

$\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 非一致收敛 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$, $\forall A_0>c$, $\exists A'$, $A''>A_0$ 及 $x_0\in[a, b]$，使得 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x_0, y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0$.

4. 一致收敛判别法

(1) M-判别法　设存在函数 $M(y)$ 与常数 $B > c$，使得当 $y \geqslant B$ 与 $x \in [a, b]$ 时，有 $|f(x, y)| \leqslant M(y)$，而广义积分 $\int_c^{+\infty} M(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(2) 狄利克雷判别法　设（ⅰ）含参变量的正常积分 $\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $A \geqslant c$ 与 $x \in [a, b]$ 有界，即 $\exists M > 0$，$\forall A > c$，$\forall x \in [a, b]$，有 $\left|\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M$；（ⅱ）对每个固定的 $x \in [a, b]$，函数 $g(x, y)$ 关于 y 是单调的，且当 $y \to +\infty$ 时，$g(x, y)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 一致趋向于 0，则含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(3) 阿贝尔判别法　设（ⅰ）$\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛；（ⅱ）对每个固定的 $x \in [a, b]$，函数 $g(x, y)$ 关于 y 单调，$g(x, y)$ 在 $x \in [a, b]$，$y \geqslant c$ 有界，则含参变量的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

5. 含参变量广义积分的分析性质

(1) 积分号下取极限　设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续，若含参变量广义积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(2) 积分交换次序　设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续，若含参变量广义积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛，则 $\int_a^b I(x)\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

(3) 积分号下求导数　设 $f(x, y)$ 和 $f_x(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续，若 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 一致收敛，则 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $[a, b]$ 可导，且 $I'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)\mathrm{d}y$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)\mathrm{d}y.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 8-15】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$； (2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{a}^{1+a}\frac{1}{1+x^2+a^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 因 $\sqrt{x^2+a^2}$ 是连续函数，故 $F(a)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 是 $-\infty<a<+\infty$ 的连续函数，因此 $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to 0}F(a)=F(0)=1$.

(2) 因 $\frac{1}{1+x^2+a^2}$，a，$1+a$ 都是连续函数，故 $F(a)=\int_{a}^{1+a}\frac{1}{1+x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 是 $-\infty<a<+\infty$ 的连续函数，因此 $\lim\limits_{a\to 0}\int_{a}^{1+a}\frac{1}{1+x^2+a^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to 0}F(a)=F(0)=\frac{\pi}{4}$.

【例 8-16】 求函数 $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ 的导数.

【解】 这属于积分限含参数的情形，利用公式得

$$F'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{x|\sin x|}\sin x-\mathrm{e}^{x|\cos x|}\cos x.$$

【例 8-17】 求 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ $(n\in\mathrm{N}^+)$.

【解】
$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+yx)^{\frac{1}{y}}}=\int_0^1\lim_{y\to 0^+}\frac{\mathrm{d}x}{1+[(1+yx)^{\frac{1}{yx}}]^x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}},$$

故 $J=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

【例 8-18】 利用积分号下求导法求下列积分：

(1) $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)\mathrm{d}x\ (a>1)$；

(2) $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x\quad(|a|<1)$.

【解】 (1) $\forall a>1$，取 b，使得 $a>b>1$，于是 $f(x,a)=\ln(a^2-\sin^2 x)$，$f_a(x,a)=\dfrac{2a}{a^2-\sin^2 x}$ 都在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[b,+\infty)$ 连续，所以

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\dfrac{1-\cos 2x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a}{2a^2-1+\cos 2x}\mathrm{d}x.$$

令 $\tan x=t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a}{2a^2-1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{a^2-1}{a^2}t^2}\frac{2}{a}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}t\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

因此 $I'(a)=\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 从而 $I(a)=\displaystyle\int\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{d}a=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C$.
下面确定常数 C.

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

令 $a\to+\infty$，$\pi\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\to\pi\ln 2$. 又由

$$0<1-\frac{1}{a^2}\leqslant 1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\leqslant 1,\ \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\leqslant\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\right)\leqslant 0 \text{ 知，}$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\right)\mathrm{d}x\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|\to 0\ (a\to+\infty).$$

故 $C=-\pi\ln 2$. 所以 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

$$(2)\ I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{1+a^2\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}\mathrm{d}x.$$

令 $\tan x = t$，则

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\frac{-a^2}{1-a^2}}{1+a^2t^2} + \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1+t^2} \right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2(1+|a|)}.$$

从而 $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C_1 \quad (0 < a < 1)$，$I(a) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-a) + C_2$ $(-1 < a < 0)$.

由于 $f(x, a) = \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$ 在 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$，$-1 < a < 1$ 连续，从而 $I(a)$ 在 $-1 < a < 1$ 连续，$I(0) = 0$，故 $C_1 = C_2 = 0$，于是 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a\ln(1+|a|)$.

【例 8-19】 计算积分：

(1) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x (b > a > 0)$；

(2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x (a > 0, b > 0)$.

【解】 (1) 方法一　函数 $y(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ 在 $x = 0$ 及 $x = 1$ 处无定义. 但 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$. 定义，当 $x = 0$ 时，$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$，当 $x = 1$ 时，$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$. 则 $y(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ 在[0, 1]连续. 又已知 $y(x) = \int_a^b x^y\mathrm{d}y$，而函数 $f(x, y) = x^y$ 在矩形区域 $[0, 1]\times[a, b]$ 连续，根据积分交换次序定理，有 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y = \int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x = \int_a^b \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \ln\frac{1+b}{1+a}$.

方法二　令 $I = I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$. 由积分号下求导数定理得，$\frac{\partial I}{\partial b} = \int_0^1 x^b\mathrm{d}x = \frac{1}{1+b}$. 所以 $I(a, b) = \ln(1+b) + C(a)$，$\frac{\partial I}{\partial a} = C'(a)$. 同

理可得，$\frac{\partial I}{\partial a}=\int_0^1 -x^a\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+a}$. 所以 $C'(a)=-\frac{1}{1+a}$，$C(a)=\ln\frac{1}{1+a}+C_1$. 故 $I(a,b)=\ln\frac{1+b}{1+a}+C_1$. 令 $a=b$，可得 $C_1=0$. 故 $I(a,b)=\ln\frac{1+b}{1+a}$.

(2) 不妨设 $a<b$，$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. 事实上由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0$，$\lim\limits_{x\to1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0$，可补充定义，当 $x=0$ 及 $x=1$ 时，$x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$，从而 $x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$，$a\leqslant y\leqslant b$ 连续. 应用积分交换次序定理得，原式 $=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. 作代换 $x=\mathrm{e}^{-t}$，可得

$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y+1)t}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1+(1+y)^2}$，于是，原式 $=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$.

【例 8-20】 求 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\mathrm{d}x\,(a>b>0)$.

【解】 $f(x,y)=\frac{2ab\sin x}{a^2-b^2y^2\sin^2x}$ 在矩形区域$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$连续，而 $\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=\int_0^1\frac{2ab\sin x}{a^2-b^2y^2\sin^2x}\mathrm{d}y$，应用积分交换次序定理得，

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{2ab\sin x}{a^2-b^2y^2\sin^2x}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab\sin x}{a^2-b^2y^2\sin^2x}\mathrm{d}x=\pi\arcsin\frac{b}{a}.$$

【例 8-21】 证明 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\neq\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$.

【证明】 方法一 $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$，$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$，所以

左端 $=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$，

而右端 $= \int_0^1 -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 dy = -\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy = -\frac{\pi}{4}$. 故左端 $\neq$ 右端.

方法二　令 $y = x\tan t$, 则

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \int_0^{\arctan\frac{1}{x}} \frac{x^2-x^2\tan^2 t}{(x^2+x^2\tan^2 t)^2}\cdot x\sec^2 t\,dt$$

$$= \int_0^{\arctan\frac{1}{x}} \frac{1}{x}(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = \frac{1}{2x}\sin\left(2\arctan\frac{1}{x}\right).$$

令 $x = y\tan t$, 则 $\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{1}{2y}\sin\left(2\arctan\frac{1}{y}\right)$, 于是

左端 $= \int_0^1 \frac{1}{2x}\sin\left(2\arctan\frac{1}{x}\right)dx$, 右端 $= \int_0^1\left(-\frac{1}{2y}\right)\sin\left(2\arctan\frac{1}{y}\right)dy$.

$f(x) = \frac{1}{2x}\sin\left(2\arctan\frac{1}{x}\right) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$. 故左端 $\neq$ 右端.

【例 8-22】　设 $f(x)$ 为可微函数, 求函数 $F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|dy$ $(a < b)$ 的二阶导数.

【解】　当 $x \in (a, b)$ 时, 由于 $F(x) = \int_a^x f(y)(x-y)dy + \int_x^b f(y)(y-x)dy$, 故

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(y)(x-y)dy - \frac{d}{dx}\int_b^x f(y)(y-x)dy$$

$$= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[f(y)(x-y)]dy - \int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[f(y)(y-x)]dy$$

$$= \int_a^x f(y)dy + \int_b^x f(y)dy,$$

从而 $F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.

当 $x \notin (a, b)$ 时, 例如 $x \leqslant a$, 则 $F(x) = \int_a^b f(y)(y-x)dy$,

故 $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[f(y)(y-x)]dy = -\int_a^b f(y)dy$, 从而 $F''(x) = 0$.

同理, 对于 $x \geqslant b$ 也可得 $F''(x) = 0$.

综上所述, $F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$.

【例 8-23】　设 $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)d\theta$, 求证 $F(x) \equiv 2\pi$.

【证明】　因为 $F(0) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, 要证 $F(x) = 2\pi$, 只须证 $F(x)$ 为常

数.

$F'(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}[e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)]d\theta=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(\theta+x\sin\theta)d\theta$，由此

$F''(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(2\theta+x\sin\theta)]d\theta$，用数学归纳法，$\forall n\in N^+$，有

$F^{(n)}(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(n\theta+x\sin\theta)d\theta$，因此 $F^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$. 由泰勒公式，$F(x)-F(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(\theta_1x)x^n=\frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(\theta_1x)x^n$ $(0\leqslant\theta_1\leqslant1)$. 又 $|F^{(n)}(\theta_1x)|\leqslant e^x\cdot2\pi$，故 $\left|\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta_1x)x^n\right|\leqslant\frac{2\pi e^xx^n}{n!}\to0\ (n\to\infty)$. 故 $F(x)=F(0)\equiv2\pi$.

【例 8-24】 讨论下列积分在指定区间的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx\ (0\leqslant\alpha\leqslant+\infty)$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，(ⅰ) $a<\alpha<b$，(ⅱ) $-\infty<\alpha<+\infty$.

【解】 (1) 方法一　设 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$，由于 $I(0)=0$，而当 $\alpha>0$ 时，作变换 $t=\sqrt{\alpha}x$ 可得，$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\lim\limits_{\alpha\to0}I(\alpha)\neq I(0)$，故 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant+\infty$ 不一致收敛.

方法二　取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\int_1^2e^{-t^2}dt>0$，$\forall N>0$，取 $\alpha_0=\frac{1}{2N^2}$，$A'=\sqrt{2}N$，$A''=2\sqrt{2}N$，则 A'，$A''>N$，$\alpha_0\in[0,+\infty)$，而 $\left|\int_{A'}^{A''}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx\right|=\int_1^2e^{-x^2}dx\geqslant\varepsilon_0$，因此 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 不一致收敛.

(2) 对任何固定的 α，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 都收敛，令 $x-\alpha=t$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

(ⅰ) 取正数 R 充分大，使 $-R<a<b<R$. 显然，当 $|x|\geqslant R$ 时，对一切 $a<\alpha<b$，有 $0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2}$，显然积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$ 收敛，故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 对 $a<\alpha<b$ 一致收敛.

(ⅱ) $\forall A>0$, 有$\lim\limits_{a\to\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{A-a}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

故 $\forall A>0$, 可取 a 充分大, 使得$\int_A^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 由此可知$\int_0^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx$ 在 $-\infty<a<+\infty$ 不一致收敛, 当然$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx$ 在 $-\infty<a<+\infty$ 不一致收敛.

【例8-25】 (大连理工大学 2000年) 设 $f(x, y)$ 于 $(-\infty, +\infty)\times[a, b)$ 连续, $I(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dx$ 于 $y\in[a, b)$ 收敛, 但$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, b)dx$ 发散. 证明 $I(y)$ 于 $y\in[a, b)$ 非一致收敛.

分析 由柯西原理只需证 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall A_0\in(-\infty, +\infty)$, $\exists A''>A'>A_0$, 及 $y\in[a, b)$ 使得$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, y)dx\right|\geqslant\varepsilon_0$. 又因为

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, y)dx\right|=\left|\int_{A'}^{A''}[f(x, y)-f(x, b)]dx+\int_{A'}^{A''}f(x, b)dx\right|$$
$$\geqslant\left|\int_{A'}^{A''}f(x, b)dx\right|-\left|\int_{A'}^{A''}f(x, y)-f(x, b)]dx\right|,$$

所以只需证$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, b)dx\right|\geqslant 2\varepsilon_0$, $\left|\int_{A'}^{A''}[f(x, y)-f(x, b)]dx\right|<\varepsilon_0$.

【证明】 方法一 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, b)dx$ 发散, 故 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall A_0\in(-\infty, +\infty)$, $\exists A''>A'>A_0$, 使得$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, b)dx\right|\geqslant 2\varepsilon_0$. 因 $f(x, y)$ 于$(-\infty, +\infty)\times[a, b)$ 连续, 补充定义 $f(x, b)=\lim\limits_{y\to b^-}f(x, y)$, 则 $f(x, y)$ 于 $(-\infty, +\infty)\times[a, b]$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在有界闭区域$[A', A'']\times[a, b]$一致连续. 于是对上述 $\varepsilon_0>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x'-x''|<\delta$, $|y'-y''|<\delta$, 且 $x', x''\in[A', A'']$, $y', y''\in[a, b]$ 时, 有 $|f(x', y')-f(x'', y'')|<\frac{\varepsilon_0}{A''-A'}$. 从而, $|y-b|<\delta$ 时, 有 $|f(x, y)-f(x, b)|<\frac{\varepsilon_0}{A''-A'}$, 故$\left|\int_{A'}^{A''}[f(x, y)-f(x, b)]dx\right|<\varepsilon_0$. 结论得证.

方法二 用反证法. 设 $I(y)$ 在$[a, b)$一致收敛, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>a$, 当 $A', A''>N$ 时, $\forall y\in[a, b)$, 有$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, y)dx\right|<\varepsilon$. 令 $y\to b^-$, 得$\left|\int_{A'}^{A''}f(x, b)dx\right|\leqslant\varepsilon(A', A''>N)$. 这与$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, b)dx$ 发散矛盾. 故

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$ 在$[a, b)$不一致收敛.

【例 8-26】 证明含参变量广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy}\cos y}{y^p}\mathrm{d}p(p > 0)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

【证明】 $\left|\int_1^A \cos y\mathrm{d}y\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2$, 当$0 \leqslant x < +\infty$时, 函数$\frac{e^{-xy}}{y^p}$在 $y \geqslant 1$ 时关于 y 单调下降, 且当 $y \to +\infty$ 时关于 $x(0 \leqslant x < +\infty)$ 一致趋于 0, 由狄利克雷判别法知, 积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}\cos y}{y^p}\mathrm{d}y$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 一致收敛.

【例 8-27】 证明含参变量积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\mathrm{d}x$ 关于 $p \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

【证明】 由于$\int_0^{+\infty} \sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛, 又$\frac{1}{1 + x^p}(p \geqslant 0)$在 $x \geqslant 0$ 对 x 单调下降且一致有界, 即 $0 < \frac{1}{1 + x^p} \leqslant 1$ ($p \geqslant 0$, $x \geqslant 0$), 由阿贝尔判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p \geqslant 0$ 时一致收敛.

【例 8-28】 判断积分$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin yx}{1 + x^2}\mathrm{d}x$, $y \in [\delta, +\infty)(\forall \delta > 0)$的一致收敛性.

【解】 $\forall A > 0$, $\left|\int_0^A \sin(yx)\mathrm{d}x\right| < M$, 其中 $M = \frac{2}{\delta}$. 又$\frac{x}{1 + x^2}$是单调的, 且一致趋向于 $0(x \to +\infty)$, 由狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin yx}{1 + x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta, +\infty)(\forall \delta > 0)$ 一致收敛.

【例 8-29】 讨论函数 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1 + y^x}\mathrm{d}y$ 在$(3, +\infty)$的连续性.

【解】 考察积分$\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{1 + y^x}\mathrm{d}y$. 任取 $x_0 > 3$. 由于当 $y \geqslant 1$, $x \geqslant x_0 > 3$ 时, $0 < \frac{y^2}{1 + y^x} < \frac{y^2}{y^x} = \frac{1}{y^{x-2}} \leqslant \frac{1}{y^{x_0-2}}$, 积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{x_0-2}}\mathrm{d}y$收敛, 由 M- 判别法知, 积分$\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{1 + y^x}\mathrm{d}y$ 在 $[x_0, +\infty)$ 一致收敛, 从而积分$\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1 + y^x}\mathrm{d}y$ 在 $[x_0, +\infty)$ 一致收敛, 所以 $F(x)$ 当 $x \geqslant x_0$ 时连续. 由 $x_0 > 3$ 的任意性知, $F(x)$ 在$(3, +\infty)$连续.

【例 8-30】 求积分$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt$.

【解】 令$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-at}}{t}\cos t\,dt$，由于$\left|\int_0^A\cos t\,dt\right|=|\sin A|\leqslant 1$，对每个固定的$a\in[0,+\infty)$，$\frac{1-e^{-at}}{t}$关于$t$是单调的，且当$t\to+\infty$时，$\frac{1-e^{-at}}{t}$在$a\in[0,+\infty)$一致趋于0，故$I(a)$在$[0,+\infty)$一致收敛，应用积分号下求导数定理，得

$I'(a)=\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos t\,dt=-a-a^2\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos t\,dt$，从而$I'(a)=\frac{-a}{1+a^2}$，进而

$I(a)=-\frac{1}{2}\ln(1+a^2)+C$，由于$I(0)=0$知，$C=0$. 故$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt=I(1)=-\frac{1}{2}\ln 2$.

【例 8-31】 计算积分：(1) $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx\ (a>0)$；

(2) $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx\ (a>0)$.

【解】 (1) 令$I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$，由$e^{-ax^2}\cos bx$与$\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$都在$[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$连续，并且$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2}$，$|xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2}$，而积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$都收敛，故积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$都在$-\infty<b<+\infty$一致收敛. 应用积分号下求导数定理，得

$$\begin{aligned}I'(b)&=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx\\&=\frac{1}{2a}\left(e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-b\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx\right)\\&=-\frac{b}{2a}I(b).\end{aligned}$$

于是$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=\int-\frac{b}{2a}db$，即$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C(-\infty<b<+\infty)$，从而$I(b)=I(0)e^{-\frac{b^2}{4a}}$，而$I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 因此，$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

(2) $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bx\mathrm{d}e^{-ax^2} = \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x$. 由 (1) 得 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

【例 8-32】 利用 $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}\mathrm{d}y(x>0)$，计算积分

$$F = \int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \text{ 和 } F_1 = \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

【解】 在积分 $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}\mathrm{d}y$ 两端乘以 $\sin x$，再在 $0 < x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_0y^2}}{1+y^4}\mathrm{d}y + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}\mathrm{d}y - \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^4}\mathrm{d}y - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $e^{-x_0y^2}\leqslant 1$，$e^{-x_1y^2}\leqslant 1$，且积分 $\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y$ 均收敛，故上述等式右端的积分分别对 $0\leqslant x_0<+\infty$，$0\leqslant x_1<+\infty$ 都是一致收敛的，从而它们分别都是 $0\leqslant x_0<+\infty$，$0\leqslant x_1<+\infty$ 的连续函数. 令 $x_0\to 0^+$，可在积分号下取极限，得

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^2}\mathrm{d}y - \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x_1y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}}$. 令 $x_1\to+\infty$，得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 综上所述，

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同理可得，$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

§3 综合例题

【例 8-33】 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的可微函数，且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 单调下降趋于 0，若积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则积分 $\int_1^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

【证明】 由例 8-5 知，$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$. 又 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>a$，当 u_1，$u_2>A$ 时，$|u_1f(u_1)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|u_2f(u_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\int_{u_1}^{u_2}xf'(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\,xf(x)\Big|_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|u_2f(u_2)-u_1f(u_1)-\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant |u_2f(u_2)|+|u_1f(u_1)|+\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西收敛原理知，$\int_1^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

【例 8-34】 证明无穷限积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对任一趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$（其中 $x_1=a$），级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【证明】 必要性. 任取趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$（其中 $x_1=a$），因为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x$ $=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且收敛于同一个数.

充分性．设对任一趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$（其中 $x_1=a$），级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$ 的部分和数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\right\}$ 或 $\left\{\int_{a}^{x_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x\right\}$ 也收敛于同一个数，根据海涅定理，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在，即广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且收敛于同一个数．

注 （1）把无穷限积分与级数作形式上的比较是很有意义的，本例说明，无穷限积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 就相当于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x$，定积分 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 就相当于级数的部分和 $\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x$．因此，关于级数的性质和收敛性判别法大部分可相应地转移到无穷限积分上来．

（2）同理可证，含参变量广义积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ 对任一趋于 $+\infty$ 的单调上升数列 $\{A_n\}$，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛（其中 $A_1=c$）．事实上，对任给的趋于 $+\infty$ 的单调上升数列 $\{A_n\}$，由于 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，故 $\forall\epsilon>0$，$\exists A_0>c$，$\forall A>A_0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\epsilon$．对上述 A_0，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，使当 $n>N$ 时，$A_n>A_0$，从而 $\forall n>N$，$\forall x\in[a,b]$，$\left|\int_{A_n}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|<\epsilon$，这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛．充分性用反证法即可证明．

【例 8-35】（大连理工大学　2001 年）　证明若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$，则 $\lambda=0$．

【证明】　方法一　用反证法．假设 $\lambda\neq 0$，不妨设 $\lambda>0$（对于 $\lambda<0$ 情形类似可证）．

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda>0$，则对 $\varepsilon_0=\dfrac{\lambda}{2}>0$，$\exists A>\max\{0,a\}$，当 $x>A$ 时，有 $|f(x)-\lambda|<\varepsilon_0$. 于是，当 $x>A$ 时，$f(x)>\dfrac{\lambda}{2}$. 从而 $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，与 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. 故 $\lambda=0$.

方法二　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$ 存在且有限，由例 2-16 知，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，再根据例 8-4 可得 $\lambda=0$.

【例 8-36】（东南大学　2003 年）　设 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

【证明】　方法一　因为 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a)$，$x\in[a,+\infty)$，由 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$ 存在有限，再由例 8-35 得，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

方法二　由于积分 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，根据柯西原理，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>a$，$\forall x_1,x_2>A$，有 $\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 于是 $\forall\{x_n\}\to+\infty$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，当 $n,m>N$ 时，有 $x_n,x_m>A$，从而 $\left|\int_{x_m}^{x_n}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$，这表明 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 故由海涅定理，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$ 存在有限，由例 8-35 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

方法三　用反证法. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，及 $x_n\to+\infty$，使得 $|f(x_n)|>\varepsilon_0$，设 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项为正（无穷多项为负类似可证），则可将负项去掉. 不妨设 $f(x_n)>\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$. 因 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，知 $\exists\{x'_m\}$：$x'_m\to+\infty$，使得 $f(x'_m)<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，$m=1,2,\cdots$（若不然，则 $\exists G>0$，$\forall x>G$，恒有 $f(x)\geqslant\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，于是 $A>G$ 时，$\int_A^{2A}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{\varepsilon_0}{2}A\to+\infty$ $(A\to+\infty)$，与 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾）. 于是 $\forall n,m$，有 $\left|\int_{x'_m}^{x_n}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)-f(x'_m)|\geqslant\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0$. 与 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾.

【例 8-37】 判别积分$\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

【解】 令$\frac{1}{x}=t$，原式 $=\int_1^0-\ln(1-t^2)\cdot\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$. 又 $\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\right]=-1$，所以$\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ 在[0, 1]内只有一个瑕点 $t=1$，由于

$$\lim_{t\to1^-}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}=\lim_{t\to1^-}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)+\ln(1+t)}{t^2}=0$$

所以原积分收敛.

【例 8-38】 讨论瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

【解】 当 $m\leqslant0$ 时，原积分为正常积分. 当 $m>0$ 时，$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^m}$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内只有一个可能的瑕点 $x=0$. 若 $0<m\leqslant2$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^m}&=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^m}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^m}\\&=\begin{cases}0, & 0<m<2\\ \frac{1}{2}, & m=2\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $x=0$ 不是瑕点，故原积分收敛. 若 $m>2$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{m-2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 所以当 $0<m-2<1$，即 $2<m<3$ 时，原积分收敛；当 $m-2\geqslant1$，即 $m\geqslant3$ 时原积分发散. 综上所述，当 $m<3$ 时原积分收敛，当 $m\geqslant3$ 时原积分发散.

【例8-39】 设瑕积分$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$ 收敛（$x=0$ 是瑕点），函数 $f(x)$ 在(0, 1]上单调，求证$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

【证明】 不妨设 $f(x)$ 在(0, 1]上单调减少，$f(x)\geqslant0$，于是

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由于$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，在上面的不等式中令 $n \to \infty$，由极限的夹迫准则知，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

【例 8-40】 若 $xf(x)$ 在$[a, +\infty)$上单调下降，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$，且积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

【证明】 由$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$ 知，$\lim\limits_{x\to0+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$. 又由 $xf(x)$ 在$[a, +\infty)$单调下降，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ 知，$\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant \int_{\sqrt{x}}^{x} xf(x)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}xf(x)\ln x \geqslant 0$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

【例 8-41】 已知 $f(x) > 0$ 且单调下降，证明积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

分析　将无穷积分转化为级数来间接地判别其敛散性.

【证明】 因 $\sin^2 x \leqslant 1$，则由$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可以推出$\int_a^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$，由 $f(x) > 0$ 且单调下降，所以$\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \pi f(a+n\pi)$，因此级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(a+n\pi)$发散. 而

$$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(a+(n+1)\pi)\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f(a+(n+1)\pi).$$

从而$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 发散.

【例 8-42】 证明(1) 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}\quad(b>a>0).$$

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在，但$\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 对某一 $c>0$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(b>a>0).$$

【证明】 (1) 任取 $\delta>0$，$A>\delta$，$\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-f(\eta)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}$. 其中 $\delta a\leqslant\xi\leqslant\delta b$，$Aa\leqslant\eta\leqslant Ab$，因此 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\xi=0$，$\lim\limits_{A\to+\infty}\eta=+\infty$. 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\delta\to0^+\\A\to+\infty}}\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 由$\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛知，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=0$. 因此在(1) 的推导中，最后的极限将少去第二项，只剩下$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\delta\to0^+}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

注　本例中的积分称为傅茹兰尼积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\ (a>0,\ b>0).$$

【例 8-43】 (大连理工　2002 年)　设 $f(x)$ 于$[a,+\infty)$ 绝对可积. 证明 $I(u)=\int_a^{+\infty}f(x)\sin ux\mathrm{d}x$ 于 $u\in(-\infty,+\infty)$ 一致连续.

【证明】 由于当 $a<x<A$ 时($A>\max\{a,0\}$)，

$|\sin u_1x-\sin u_2x|=2\left|\cos\frac{u_1+u_2}{2}x\sin\frac{u_1-u_2}{2}x\right|\leqslant|u_1-u_2|A$，故

$$|I(u_1)-I(u_2)|=\left|\int_a^{+\infty}f(x)\sin u_1x\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x)\sin u_2x\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)| \, |\sin u_1 x - \sin u_2 x| \, dx$$

$$\leqslant 2\int_A^{+\infty} |f(x)| dx + |u_1 - u_2| A \cdot \int_a^A |f(x)| dx.$$

已知$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛，设为 B，所以取 $A > \max\{a, 0\}$ 充分大时，使

$$2\int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2AB}$，则当$|u_1 - u_2| < \delta$时，有

$$|u_1 - u_2| A \cdot \int_a^A |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而
$$|I(u_1) - I(u_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

【例 8-44】 由积分 $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ 计算 $p(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx$.

【解】 取定 $a > 0$，令 $J(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$，$J'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$. 由于 $e^{-ax}\cos bx$ 当 $x \geqslant 0$，$b \geqslant 0$ 时连续，且 $|e^{-ax}\cos bx| \leqslant e^{-ax} (a > 0)$，而$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛，由 M- 判别法知，$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ 关于 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 故

$$J'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

又当 $b = 0$ 时，$J(b) = 0$，因此

$$J(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^b \frac{a}{t^2 + a^2} dt = \arctan \frac{b}{a}.$$

易知，$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ 在 $0 \leqslant a \leqslant +\infty$ 一致收敛，故$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \arctan \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \mathrm{sgn} b$.

【例 8-45】 计算积分 $I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}$(其中 $n \in \mathrm{N}^+$，$a > 0$).

【解】 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2 + a}\right) = -\frac{1}{(x^2 + a)^2}$. 当 $x \geqslant 0$，$a \geqslant a_0 > 0$时，$\frac{1}{(x^2 + a)^2} \leqslant \frac{1}{(x^2 + a_0)^2}$，而积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a_0)^2}$收敛，从而积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^2}$在$[a_0, +$

$\infty)$ 一致收敛. 故 $\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}$. 由 $a_0>0$ 的任意性知, 上式对一切 $a>0$ 均成立. 同理对 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导, 得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

利用公式 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}(a>0)$, 得 $\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)=-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}$, $\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)=\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\frac{1}{\sqrt{a^5}}$, … 由数学归纳法, 得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$ 所以

$$I_n(a)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

【例 8-46】 设 $I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx(\alpha>0,\beta>0)$,

(1) $\forall b>0$, 证明广义积分 $I(\alpha,\beta)$ 关于 $\alpha\in[0,b]$ 一致收敛;

(2) 求广义积分 $I(\alpha,\beta)$ 的值;

(3) 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$.

【解】 (1) 对于 $0\leqslant\alpha\leqslant b$,

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 收敛. 所以广义积分 $I(\alpha,\beta)$ 关于 $\alpha\in[0,b]$ 一致收敛. (2) 于是 $I(\alpha,\beta)$ 是 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上的连续函数. 由 $b>0$ 的任意性知, $I(\alpha,\beta)$ 当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时连续.

由 $0\leqslant\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\leqslant\frac{2bx^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad\begin{pmatrix}(0\leqslant x<+\infty)\\0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant b\end{pmatrix}$,

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2bx^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha\beta+1},$$

当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant b$ 时是一致收敛的. 于是, 当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant b$ 时, 在积分号

下求导数得，$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\dfrac{\pi}{\alpha\beta+1}$. 由 α_0 与 b 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 均成立. 两端积分，得 $I(\alpha,\beta)=\dfrac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)+C\quad(0<\alpha<+\infty)$，令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上连续，得 $0=I(0,\beta)=0+C$，故 $C=0$. 于是

$I(\alpha,\beta)=\dfrac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)(0\leqslant\alpha<+\infty)$. (3) $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx=\pi\ln2$.

【例 8-47】 设 $I(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx\quad(\alpha\geqslant0)$. 证明 $I(\alpha)$ 可微并求出 $I(\alpha)$.

【解】 易知 $I(0)=0$. 当 $\alpha>0$ 时，由于 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^3\cdot\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2}$，故 $I(\alpha)$ 收敛. 易知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}$$

对 $\alpha\geqslant0$ 一致收敛. 利用积分号下求导得，

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}\\&=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\alpha^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}=\frac{\pi}{2}-\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}(\alpha\geqslant0).\end{aligned}$$

从而有 $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\alpha-\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}+C(\alpha\geqslant0)$，其中 C 为待定系数.

令 $\alpha=0$，得 $I(0)=0=-\dfrac{\pi}{2}+C$，故 $C=\dfrac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})\quad(\alpha\geqslant0).$$

【例 8-48】（东南大学 2004 年） 设 $p>0$，判别积分 $F(p)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\arctan x}{x^p}dx$ 的敛散性，包括绝对收敛，条件收敛和发散，并证明 $F(p)$

当 $p>0$ 时连续.

【证明】 首先讨论积分的敛散性. 当 $p>1$ 时, 由于

$$\left|\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^p},\ \forall x\geqslant 1,$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 故积分 $F(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时, 令 $g(x)=\frac{\arctan x}{x^p}$, 则

$$g'(x)=\frac{\frac{x^p}{1+x^2}-px^{p-1}\arctan x}{x^{2p}}=\frac{x-p(1+x^2)\arctan x}{x^{1+p}(1+x^2)}$$

$$\leqslant\frac{x-p(1+x^2)\frac{\pi}{4}}{2},\ x\geqslant 1.$$

而当 x 充分大时, $\frac{x-p(1+x^2)\frac{\pi}{4}}{2}<0$. 从而当 x 充分大时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调下降. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x^p}=0$; 又 $\forall A>1$, $\left|\int_1^A\cos x\mathrm{d}x\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2$. 根据狄利克雷判别法, 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 又 $\left|\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\right|\geqslant\frac{\frac{\pi}{4}\cos^2 x}{x^p}=\frac{\pi}{8x^p}+\frac{\pi\cos 2x}{8x^p}$, 同样应用狄利克雷判别法知, 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\pi\cos 2x}{8x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{8x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 从而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散. 所以当 $0<p\leqslant 1$ 时, 原积分条件收敛.

下证 $F(p)$ 当 $p>0$ 时连续. $\forall p_0\in(0,+\infty)$, 由于 $\left|\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos x}{x^{\frac{p_0}{2}}}$, $x>1$, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{\cos x}{x^{\frac{p_0}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛, 由狄利克雷判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $\left[\frac{p_0}{2},2p_0\right]$ 上一致收敛, 又函数 $\frac{\cos x\arctan x}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$

$\times\left[\frac{p_0}{2}, 2p_0\right]$连续，故 $F(p)$ 在$\left[\frac{p_0}{2}, 2p_0\right]$上连续，从而 $F(p)$ 在 p_0 连续．由 $p_0>0$ 的任意性知，$F(p)$ 在$(0, +\infty)$ 连续．

【例 8-49】 设 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$，证明

(1) $F'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$；

(2) $F''(\alpha)=F(\alpha)-\frac{\pi}{2} \quad (\alpha>0)$．

【证明】 先讨论三个反常积分：

① $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx$； ② $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$；

③ $\int_0^{+\infty}\frac{-x\sin\alpha x}{1+x^2}dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$．

由 $\left|\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}(x\geqslant1)$，$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ 知，①，② 两个积分对 $-\infty<\alpha<+\infty$ 一致收敛．由于$\frac{-x}{1+x^2}$ 单调趋于零及 $\sin\alpha x$ 的积分有界性知，③ 积分对 $\alpha>0$ 内闭一致收敛．由含参变量的反常积分的求导法则，得 $F'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$，$F''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{-x\sin\alpha x}{1+x^2}dx=F(\alpha)-\frac{\pi}{2}$．此处利用了 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$．

附录 1 《数学分析简明教程》典型习题解答

第二章 函 数

§1 函数的概念

2. 见例 1-24.　　3. 见例 1-1.　　10. 见例 1-2.
11. 见例 1-3.　　13. 见例 1-4.　　14. 见例 1-5.

§2 复合函数与反函数

4. 见例 1-6.

第三章 极限与函数的连续性

§2 数列的极限

1. 用定义证明下列数列的极限为零:((6)(7) 小题见例 1-8 和例 1-9)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$;　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+a^{-n}\right)$ $(a>1)$.

【证明】 (1) $\forall\epsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{2}{\epsilon}\right]+1$, $\forall n>N$, $\left|\dfrac{n+1}{n^2+1}-0\right|=$ $\dfrac{n+1}{n^2+1}<\dfrac{2n}{n^2}=\dfrac{2}{n}<\epsilon$.

(5) $\forall\epsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\epsilon^2}\right]+1$, $\forall n>N$, $|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0|=$

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

(10) 令 $a = 1+h(h>0)$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{1+h}{\varepsilon h}\right]+1$, $\forall n > N$, $\left|\left(\dfrac{1}{n}+a^{-n}\right)-0\right| = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{a^n} < \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{nh} = \dfrac{1+h}{nh} < \varepsilon$.

2. 用定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1} = \dfrac{3}{2}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, 其中 $x_n = \begin{cases} 3, & n = 3k \\ \dfrac{3n+1}{n}, & n = 3k+1 \\ 2+\dfrac{1+n}{3-\sqrt{n}+n}, & n = 3k+2 \end{cases}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

【证明】 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\left\{3, \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$, $\forall n > N$, $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right| = \dfrac{2n+3}{2(2n^2-1)} < \dfrac{4n}{n^2} = \dfrac{4}{n} < \varepsilon$.

(4) 当 $n = 3k$ 时, $|x_n - 3| = 3-3 = 0$; 当 $n = 3k+1$ 时, $|x_n - 3| = \dfrac{3n+1}{n} - 3 = \dfrac{1}{n}$; 当 $n = 3k+2$ 时, $|x_n - 3| = \dfrac{\sqrt{n}-2}{3+n-\sqrt{n}} < \dfrac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = \dfrac{n^{\frac{3}{2}}+n}{n^2-n} < \dfrac{2n^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}n^2} = \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ $(n > 4)$, 于是, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\left\{4, \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$, $\forall n > N$, $|x_n - 3| < \dfrac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

3. 用定义证明:

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a > b$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b$;

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

【证明】 (3) 因 $a_n \to a(n\to\infty)$, 则对 $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2} > 0$, $\exists N \in \mathrm{N}^+$, $\forall n > N$,

$$|a_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b.$$

(4) 若 $a = 0$, 因 $a_n \to a = 0(n\to\infty)$, 且 $a_n > 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in$

$\mathbf{N}^+$，$\forall n > N$，$|a_n - 0| = a_n < \varepsilon^2$，从而$\left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$.若$a > 0$，由$a_n \to a > 0(n \to \infty)$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > N$，$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$.于是，有$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$.综上，有$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

4．极限的定义改成下面的形式是否可以：

(1) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n \geqslant N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$；

(2) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|x_n - a| \leqslant \varepsilon$；

(3) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|x_n - a| < M\varepsilon$(M为常数).

【解】 (1) 可以.(2) 可以.(3) 可以.

5．若$\{x_n y_n\}$收敛，能否断定$\{x_n\}$，$\{y_n\}$也收敛?

【解】 不能.如$x_n = 0$，$y_n = (-1)^n$.

6．设$x_n \leqslant a \leqslant y_n(n = 1, 2, \cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，求证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

【证明】 因$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > N$，$|(y_n - x_n) - 0| = |y_n - x_n| < \varepsilon \Rightarrow y_n < x_n + \varepsilon$；又$x_n \leqslant a \leqslant y_n$，于是，就有$a \leqslant y_n < a + \varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.同理可证，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

7．利用极限的四则运算求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + 2n^2 - n + 1}{2n^3 - 3n^2 + 2}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{10})$.

【解】 (1) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^3}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{3}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 10$.

8．求下列极限：((2)(5)(9) 小题见例 1-10，例 1-11 和例 1-27)

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n + 1)^\alpha - n^\alpha]$，$0 < \alpha < 1$.

【解】 由于$0 < \alpha < 1$，则$1 < \left(\dfrac{n + 1}{n}\right)^\alpha < 1 + \dfrac{1}{n}$，即$n^\alpha < (n + 1)^\alpha <$

$n^a\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 于是 $0<(n+1)^a-n^a<n^{a-1}=\frac{1}{n^{1-a}}\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^a-n^a]=0$.

10. 设 $x_n=(-1)^n$，证明 $\{x_n\}$ 发散.

【证明】 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，而 $x_{n+1}=-x_n$，就有 $a=-a\Rightarrow a=0$. 但对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N\in\mathrm{N}^+$，取 $n=2N$，有 $|x_n-0|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$. 即 $\{x_n\}$ 不以 0 为极限，$\{x_n\}$ 发散.

11. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

【证明】 $[\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)]^n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant m[\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)]^n$，故 $\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，由夹追准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$；(2) 若 $a>0$，$a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

【证明】 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathrm{N}^+$，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
\text{考虑}\left|\frac{[na_n]}{n}-a\right| &= \left|\frac{[na_n]-na}{n}\right| = \left|\frac{[na_n]-na_n+na_n-na}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{|[na_n]-na_n|}{n}+\frac{n|a_n-a|}{n} \\
&= \frac{|[na_n]-na_n|}{n}+|a_n-a|<\frac{1}{n}+|a_n-a|.
\end{aligned}
$$

于是，取 $N=\max\left\{N_1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{[na_n]}{n}-a\right|<\frac{1}{n}+\varepsilon<2\varepsilon$.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a>0$ 知，对 $\varepsilon_0=\frac{a}{2}>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon_0=\frac{a}{2}$，即 $0<\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}$. 从而 $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}=1$，由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

13．利用单调有界原理，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出它：((1) 小题见例 1-12)

(4) $x_0=1$，$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，$n=1, 2, \cdots$.

【证明】 (4) 显然$0<x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}\leqslant 2$，即$\{x_n\}$有界；$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{1+x_n}-\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$，而$x_1>x_0$，由数学归纳法可知，$x_n$单调增加．故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_n}{1+x_n}\right)$，$a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解得$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$(舍去负值)．

15．证明：$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【证明】 由已知，对$\epsilon_0=\dfrac{l-1}{2}$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\dfrac{l-1}{2}$成立，即$l-\dfrac{l-1}{2}<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，即$a_{n+1}<\dfrac{2}{l+1}a_n$，$0<a_{n+1}<\left(\dfrac{2}{l+1}\right)^n a_1\to 0(n\to 0)$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

16．见例 1-25.

18．用定义证明下列数列为无穷大量：(1) $\{\sqrt{n}\}$；(4) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

【证明】 (1) $\forall G>0$，取$N=[(G+1)^2]$，则当$n>N$时，有$\left|\sqrt{n}\right|=\sqrt{n}>G$.

(4) $\dfrac{1}{n}>\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$．$\forall G>0$，取$N=\mathrm{e}^{[G]+2}$，当$n>N$时，有$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)>G$.

21．利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，求下列极限：((4) 小题见例 1-13)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right]^{-n\cdot(-1)}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

§3 函数的极限

1. 用极限定义证明下列极限:((1) 小题见例 1-14)

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{x^2-9}=\infty$; (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{x^2-1}=1$.

【证明】 (7) 限制 $|x-3|<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow |x+3|<7$, 则 $\forall G>0$, 取 $\delta=\min\left\{1, \frac{2}{7G}\right\}$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{x}{x^2-9}\right| = \left|\frac{x}{(x+3)(x-3)}\right| > \frac{2}{7|x-3|} > G$.

(10) $\forall \varepsilon>0$, 取 $X=\max\left\{2, \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}+1}\right\}$, 当 $|x|>X$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right| = \left|\frac{4}{x^2-1}\right| = \frac{4}{x^2-1} < \varepsilon.$$

2. 用极限的四则运算法则求下列极限:((7) 小题见例 1-15)

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2} = \frac{1}{4}$.

5. 求下列函数在所示点的左右极限:((2) 小题见例 1-16)

(4) $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$, 在 $x=\frac{1}{n}$, n 是正整数;

(5) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x>0 \\ 0, & x=0, \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$.

【解】 (4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f(x) = \lim\limits_{t\to n^+} g(t) = \lim\limits_{t\to n^+}(t-[t]) = n-n=0$;

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f(x) = \lim_{t\to n^-} g(t) = \lim_{t\to n^-}(t-[t]) = n-(n-1)=1.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 2^0 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2) = 1+0^2 = 1$.

6. 求下列极限:

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$； (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}$.

【解】 (3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

(6) 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$，而 $|\sin x|\leqslant 1$，故原式 $=0$.

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{0}{1}=0$.

7. 用变量替换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]$； (2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha}\ln x\quad(\alpha>0)$；

【解】 (1) 令 $\frac{1}{x}=t$，则当 $x\to0^+$ 时，$t\to+\infty$，于是原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{[t]}{t}$，而 $t-1<[t]\leqslant t$，$1\leftarrow1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}<\frac{[t]}{t}\leqslant\frac{t}{t}=1\ (t\to+\infty)$，故原式 $=1$.

(2) 令 $x=e^{-t}$，则当 $x\to0^+$ 时，$t\to+\infty$，于是原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^{\alpha t}}=0$.

8. 提示，利用例 1-17 的结论.

9. 设 $f(x)$ 在集合 X 上定义，则 $f(x)$ 在 X 上无界的充要条件是：存在 $x_n\in X$，$n=1,2,\cdots$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$.

【证明】 必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上无界，即 $\forall G>0$，$\exists x\in X$，使得 $|f(x)|>G$. 特别取 $G=1$，$\exists x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>1$；取 $G=2$，$\exists x_2\in X$，使 $|f(x_2)|>2$；…；取 $G=n$，$\exists x_n\in X$，使 $|f(x_n)|>n$；…，由此得到一数列 $\{x_n\}\subset X$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$.

充分性. 设 $\{x_n\}\subset X$，$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$，从而 $\forall G>0$，$\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，$|f(x_n)|>G$，特别，取 $x_{N+1}\in X$，满足 $|f(x_{N+1})|>G$，从而 $f(x)$ 在 X 上无界.

10. 利用重要极限求极限：((6) 小题见例 1-18，(14) 小题见例 1-19，(20) 小题见例 1-20)

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin2x}{x^3}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;　　(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ (n 为正整数);

(19) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$;　　(22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

(24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^n$.

【解】 (3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{3}{5\cos 3x}=\dfrac{3}{5}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$$

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

(16) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

(19) 令 $\tan x=t$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，于是原式 $=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

(22) 令 $x=t+\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t\to 0$，于是

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}(\cos t)^{-\cot t}=\lim\limits_{t\to 0}(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}\cdot\frac{\cos t(1-\cos t)}{\sin t}}$

$$=\lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{2\cos t\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t}\right\}=\lim_{t\to 0}\exp\left\{\frac{t}{\sin t}\cdot\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\cdot 2t\cos t\right\}=\mathrm{e}^0$$

$=1$.

(24) 当 $x=0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\cdot\frac{n}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}}=\mathrm{e}$;

当 $x\neq 0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{x+1}$.

综上，原式 $= e^{x+1}$.

11．见例 1-21.

12．证明 $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在，其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$

【证明】 根据实数的稠密性，在 (x_0, x_0+1) 内取一有理数 x_1，取一无理数 y_1；在 $\left(x_0, x_0+\dfrac{1}{2}\right)$ 内取一有理数 x_2，取一无理数 y_2；…，在 $\left(x_0, x_0+\dfrac{1}{n}\right)$ 内取一有理数 x_n，取一无理数 y_n，…，便得到两数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(y_n) = 0$. 根据海涅定理的逆否命题，知 $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

13．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

【解】 $\sin x = 2\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = \cdots = 2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right] =$$

$\dfrac{\sin x}{x}(x\neq 0)$，当 $x=0$ 时，原式 $=1$.

16．见例 1-22.

17．证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ 的充要条件是：对任何数列 $x_n \to x_0(n\to\infty)$ 且 $x_n > x_0$，有 $f(x_n)\to+\infty(n\to\infty)$.

【证明】 必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$. 则 $\forall G>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $f(x)>G$. 由于 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 且 $x_n>x_0$，则对上述的 δ，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，当 $n>N$ 时有 $0<x-x_0<\delta$，从而当 $n>N$ 时，有 $f(x_n)>G$，即 $f(x_n)\to+\infty(n\to\infty)$.

充分性. 用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ 不真，则 $\exists G_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x'$，满足 $0<x'-x_0<\delta$，$f(x')\leqslant G_0$. 特别取 $\delta_1=1$，$\exists x_1$，满足 $0<x_1-x_0<1$，$f(x_1)\leqslant G_0$；取 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2$，满足 $0<x_2-x_0<\delta_2$，$f(x_2)\leqslant G_0$；…；取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$\exists x_n$，满足 $0<x_n-x_0<\delta_n$，$f(x_n)\leqslant G_0$；…，

这样便得一个数列$\{x_n\}$，$x_n \to x_0(n \to \infty)$，$x_n > x_0$，但 $f(x_n) \leqslant G_0$. 与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ 矛盾.

18. 设函数 $f(x)$ 在$(0, +\infty)$上满足方程 $f(2x) = f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，证明：$f(x) \equiv A$，$x \in (0, +\infty)$.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$，使得 $f(x_0) \neq A$. 不妨设 $f(x_0) > A$，又 $\forall x \in (0, +\infty)$，$f(2x) = f(x)$. 于是 $f(x_0) = f(2x_0) = \cdots = f(2^{n-1}x_0) = \cdots$. 取 $x_1 = x_0$，$x_2 = 2x_0$，$\cdots$，$x_n = 2^{n-1}x_0$，$\cdots$，便得一数列$\{x_n\}$，$x_n \to +\infty(n \to \infty)$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) \neq A$. 另一方面，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则由本书 16 的结果可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. 矛盾.

§4　函数的连续性

1. 用定义证明下列函数在定义域内连续：((4) 小题见例 1-23)

(1) $y = \sqrt{x}$.

【证明】 (1) $\forall \epsilon > 0$，当 $x_0 = 0$ 时，取 $\delta = \epsilon^2$，当 $0 < x < \delta$ 时，有 $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \epsilon$；当 $x_0 > 0$ 时，取 $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$. 于是，该函数在$[0, +\infty)$内连续.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$；　(3) $f(x) = \cos^2\dfrac{1}{x}$；　(4) $f(x) = [x] + [-x]$；

(7) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$；　(11) $f(x) = \begin{cases} \sin\pi x, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

【解】 (1) 由于$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$. 故 $x = 0$ 是第二类不连续点.

(3) 由于$\lim\limits_{x\to0}\cos^2\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{x}\right)$，而$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{2}{x}$不存在. 故 $x = 0$ 是第二类不连续点.

(4) 设 $k \in \mathrm{N}$，则 $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+}([x] + [-x]) = k + (-k-1) = -1$，$\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^-}([-x] + [x]) = (k-1) + (-k) = -1$，但 $f(k) = 0$. 故

$x=k$ 为可去间断点.

(7) 由于 $\lim\limits_{x\to\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\left[(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^+}f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to\left[(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^-}f(x)=-1$, $k\in \mathbf{Z}$. 故 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类间断点.

(11) ① 当 $x_0\neq k$(k 为整数), 在 x_0 的右侧取有理数列 $\{x_n\}$ 及无理数列 $\{y_n\}$, 使当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$. 于是就有 $f(x_n)=\sin\pi x_n\to\sin\pi x_0\neq 0$, $f(y_n)=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不存在, 因此 $x_0\neq k$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

② 当 $x_0=k$, 考察 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\leqslant|\sin\pi x|=|\sin\pi x-\sin\pi x_0|\leqslant\pi|x-x_0|$, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\pi}$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 所以 $x_0=k$ 是 $f(x)$ 的连续点.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 证明对任何 $c>0$, 函数

$$g(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c\\ c, & f(x)>c\end{cases}$$

是连续的.

【证明】 由 $g(x)=\dfrac{1}{2}[\,|c+f(x)|-|c-f(x)|\,]$ 可知, $g(x)$ 是连续的.

7. 证明若连续函数在有理点的函数值为 0, 则此函数恒为 0.

【证明】 设 $f(x)$ 的定义域为 I, 则 $\forall x_0\in I$, $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则有 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$, $x\in I$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 由有理数的稠密性, 在 $O(x_0,\delta)$ 中可选出一有理数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 由于 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则有 $f(x_n)\to f(x_0)$. 又 $\forall n$, 有 $f(x_n)=0$, 从而 $f(x_0)=0$. 由 x_0 的任意性, 故 $f(x)\equiv 0$ ($\forall x\in I$).

8. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 恒正, 按 ε-δ 定义证明 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 连续.

【证明】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则 $\forall x_0\in(a,b)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{f^2(x_0)}{2}\varepsilon$. 又 $f(x_0)>0$, 由极限的保号性, $\exists\delta_2>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有

$|f(x)| > \left|\frac{f(x_0)}{2}\right| = \frac{f(x_0)}{2}$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $|x - x_0| < \delta$ 时，就

有 $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)||f(x_0)|} < \frac{\frac{f^2(x_0)}{2}}{\frac{f^2(x_0)}{2}}\varepsilon = \varepsilon$. 即 $\frac{1}{f(x)}$ 在 (a, b)

连续. 同理可证 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x = a$ 与 $x = b$ 时也连续，只需分别将 $|x - x_0| < \delta$ 换

成 $x - a < \delta$ 和 $b - x < \delta$ 即可. 综上所述，$\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续.

10. 证明：设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的单调函数，若 $x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的间断点，则 x_0 必是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【证明】 不妨设 $f(x)$ 在 (a, b) 单调增加，集合 $E = \{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 非空有上界，必存在上确界，记为 $\beta = \sup E$，对一切 $x \in (a, x_0)$ 成立 $f(x) \leqslant \beta$；而 $\forall \varepsilon > 0$，必存在 $x_1 \in (a, x_0)$，使得 $f(x_1) > \beta - \varepsilon$，取 $\delta = x_0 - x_1 > 0$，则当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，有 $x_1 < x < x_0$，成立 $f(x_1) \leqslant f(x)$，于是 $-\varepsilon < f(x_1) - \beta \leqslant f(x) - \beta < 0$，即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$.

同理可证，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}$.

由上证明可知，(a, b) 上单调函数在 x_0 点的左、右极限均存在. 于是，x_0 必是 $f(x)$ 的第一类间断点.

11. 见例 2-20.　13. 见例 2-21.　14. 见例 2-22.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant x (x \geqslant 0)$，若 $a_1 \geqslant 0$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 求证 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，$f(l) = l$；(3) 如果将条件改为 $0 \leqslant f(x) < x (x > 0)$，则 $l = 0$.

【证明】 (1) 因 $a_1 \geqslant 0$ 且 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$，所以 $a_1 \geqslant f(a_1) = a_2 \geqslant 0$，于是就有 $a_2 \geqslant f(a_2) = a_3 \geqslant 0$，……，$a_{n-1} \geqslant f(a_{n-1}) = a_n \geqslant 0$，……，故 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. 所以 $f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = l$，即 $f(l) = l$；

(3) 用反证法. 若 $l \neq 0$，则 $l > 0$. 由(2)知 $f(l) = l$，这与已知 $f(l) < l$ 相矛盾，故 $l = 0$.

16. 求极限：(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

【证明】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left\{\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x^2}{4}}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

第四章 微商与微分

§1 微商概念及其计算

1. 求抛物线 $y=x^2$ 在 $A(1, 1)$ 点和在 $B(-2, 4)$ 点的切线方程和法线方程.

【解】 在 $A(1, 1)$ 点的切线方程为 $y=2x-1$，法线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$；在 $B(-2, 4)$ 点的切线方程为：$y=-4x-4$，法线方程为：$y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$.

3. 试确定曲线 $y=\ln x$ 在哪些点的切线平行于下列直线：(1) $y=x-1$；(2) $y=2x-3$.

【解】 (1) $(1, 0)$ 点. (2) $\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$ 点.

4. 见例 3-16.

5. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程和法线方程：

(1) $y=\frac{x^2}{4}$，$P(2, 1)$； (2) $y=\cos x$，$P(0, 1)$.

【解】 (1) 切线方程为 $y=x-1$，法线方程为 $y=-x+3$.

(2) 切线方程为 $y=1$，法线方程为 $x=0$.

6. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=|x|^3$； (2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$.

【解】 (1) $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ -3x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$.

(2) $f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $f'(0)$ 不存在.

7. 见例 3-17.　8. 见例 3-18.

9. 证明：若 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0).$$

【证明】　因为 $f'(x_0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，故左边 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]=f'(x_0)$.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，且对任意 $x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$. 若 $f'(0)=1$，证明对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f'(x)=f(x)$.

【证明】　令 $x_1=x_2=0$，则 $f(0+0)=f(0)f(0)$，即 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=0$，则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x)f(0)=0$，显然 $f'(x)=f(x)=0$.

若 $f(0)=1$，则由于 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ $=f(x)f'(0)=f(x)$.

11. 设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$.

【证明】　$f'(0)$ 存在，$f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)$，又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}=-f'_-(0)$，所以 $f'(0)=-f'(0)\Rightarrow f'(0)=0$.

12. 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $f'(x_0)=3$ 存在，求 $f'(-x_0)$.

【证明】　$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(-x_0-\Delta x)-f(-x_0)}{-\Delta x}=f'(-x_0)=3.$$

13. 用定义证明：可导的偶函数的导数是奇函数，而可导的奇函数的导数是偶函数.

【证明】　设 $f(x)$ 是可导的偶函数，则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=-f'(-x),$$

即 $f'(x)$ 是奇函数.

设 $g(x)$ 是可导的奇函数，则

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-g(-x-\Delta x)+g(-x)}{\Delta x}$$
$$=g'(-x),$$

即 $g'(x)$ 是偶函数.

14. 求下列函数的导数：((3)(9) 小题见例 3-1)

(1) $y=x^2\sin x$；

(2) $y=x\cos x+3x^2$；

(4) $y=e^x\sin x-7\cos x+5x^2$；

(5) $y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-2x^3$；

(6) $y=3x+5\sqrt{x}+\dfrac{7}{x^3}$；

(7) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；

(8) $y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$；

(10) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

(11) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；

(12) $y=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}$；

(13) $y=x^3\ln x-\dfrac{1}{n}x^n$；

(14) $y=\dfrac{\cos x}{x^4}\ln\dfrac{1}{x}$；

(15) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$；

(16) $y=\dfrac{x\cos x-\ln x}{x+1}$；

(17) $y=\dfrac{1}{x+\cos x}$；

(18) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$；

(19) $y=\dfrac{xe^x-1}{\sin x}$；

(20) $y=x\sin x\ln x$.

【解】

(1) $y'=2x\sin x+x^2\cos x$.

(2) $y'=\cos x-x\sin x+6x$.

(4) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x+7\sin x+10x$.

(5) $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}-6x$.

(6) $y'=3+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-\dfrac{21}{x^4}$.

(7) $y'=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$.

(8) $y'=\dfrac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$.

(10) $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

(11) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.　　(12) $y' = \dfrac{2x^{\frac{5}{6}}-1}{6x\sqrt{x}}$.

(13) $y' = (3\ln x + 1)x^2 - x^{n-1}$.

(14) $y' = \dfrac{x\ln x\sin x - (1-4\ln x)\cos x}{x^5}$.

(15) $y' = 1 + \ln x + \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(16) $y' = \dfrac{-1 - x + x\cos x + x\ln x - x^2(1+x)\sin x}{x(x+1)^2}$.

(17) $y' = \dfrac{-1+\sin x}{(x+\cos x)^2}$.　　(18) $y' = \dfrac{-2x-\sin 2x}{(x\sin x - \cos x)^2}$.

(19) $y' = [e^x(1+x) + (1-xe^x)\cot x]\csc x$.

(20) $y' = \sin x\ln x + x\cos x\ln x + \sin x$.

15. 求下列复合函数的导数：((8)(15) 小题见例 3-2)

(1) $y = (x^3-4)^3$;　　(2) $y = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$;

(3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;　　(4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

(5) $y = \ln\ln x$;　　(6) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$;

(7) $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;　　(9) $y = \cos(\cos\sqrt{x})$;

(10) $y = \cos^3 x - \cos 3x$;　　(11) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3x^2}$;

(12) $y = \arcsin(\sin x \cdot \cos x)$;　　(13) $y = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(14) $y = e^{-x^2+2x}$;　　(16) $y = e^{2x}\sin 3x + \dfrac{x^2}{3}$;

(17) $y = \dfrac{e^{-kx}\sin\omega x}{1+x}$;　　(18) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

(19) $y = \sin^n x\cos nx$;　　(20) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

[解]

(1) $y' = 9x^2(x^3-4)^2$.

(2) $y' = (a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + 2x^2\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(3) $y' = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

(4) $y' = \frac{2x^2}{(x^3 - 1)^2}\left(\frac{1 - x^3}{1 + x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

(5) $y' = \frac{1}{x\ln x}$.

(6) $y' = \frac{a}{a^2 - x^2}$.

(7) $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

(9) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\cos\sqrt{x})\sin\sqrt{x}$.

(10) $y' = -3\cos^2 x\sin x + 3\sin 3x$.

(11) $y' = \frac{-6x}{\sqrt{2\pi}}e^{-3x^2}$.

(12) $y' = \frac{2\cos 2x}{\sqrt{4 - \sin^2 2x}}$.

(13) $y' = \frac{2}{1 + x^2}$.

(14) $y' = 2e^{-x^2+2x}(1 - x)$.

(16) $y' = 2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x + \frac{2x}{3}$.

(17) $y' = \frac{e^{-kx}[\omega(1 + x)\cos\omega x - (1 + k + kx)\sin\omega x]}{(1 + x)^2}$.

(18) $y' = \frac{a^4 + 2x^4 + a^2(1 - 3x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(19) $y' = n\sin^{n-1}x\cos nx - n\sin^n x\sin nx$.

(20) $y' = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

16. 用对数求导法求下列函数的导数:((1)(6) 小题见例 3-23)

(2) $y = \frac{x^2}{1 - x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 + x + x^2}}$;

(3) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^n$;

(4) $y = x^x,\ x > 0$;

(5) $y = x^{\ln x}(x > 0)$;

(7) $y = x^{\tan x},\ x > 0$;

(8) $y = a^{\sin x},\ a > 0$.

【解】 (3) $y' = \frac{x(4 + 6x + 2x^2 + x^3 - x^4)}{2(x^3 - 1)^2\sqrt{\frac{1 + x}{1 + x + x^2}}}$.

(3) $y' = \frac{n(x + \sqrt{1 + x^2})^n}{\sqrt{1 + x^2}}$.

(4) $y' = x^x(1 + \ln x)$. (5) $y' = x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$.

(7) $y' = x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x + \frac{\tan x}{x}\right)$.

(8) $y' = a^{\sin x}\cos x\ln a$.

17. 设 $f(x)$ 是对 x 可求导的函数, 求$\frac{dy}{dx}$:((2) 小题见例 3-3)

(1) $y = f(x^2)$； (3) $y = f(f(f(x)))$.

【解】 (1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$.

18. 设 φ 和 $\psi(x)$ 是对 x 可求导的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$；

(2) $y = \arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}(\psi(x) \neq 0)$；

(3) $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}(\varphi(x) \neq 0,\ \psi(x) > 0)$；

(4) $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)(\varphi(x) > 0,\ \psi(x) > 0,\ \varphi(x) \neq 1)$.

【解】 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x) + \varphi^2(x)}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left[\dfrac{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)\psi(x)}\right]$.

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)(\ln\varphi(x))^2}$.

19. 求下列函数的导数：((6)(9) 小题见例 3-4)

(1) $y = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$；

(2) $y = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$；

(3) $y = \arctan\dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} + \arctan\dfrac{2x}{1 - x^2}$；

(4) $y = \arctan(\tan^2 x)$；

(5) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b(a,\ b > 0)$；

(7) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|(a > 0)$；

(8) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$；

(10) $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

【解】 (1) $y' = ae^{ax}(\cos bx + \sin bx) + e^{ax}(-b\sin bx + b\cos bx)$.

(2) $y' = \arctan x$.

(3) $y' = \dfrac{5-5\sqrt{1-x^2}-x^2(\sqrt{1-x^2}+3)}{2\sqrt{1-x^2}(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}$.

(4) $y' = \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

(5) $y' = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(b-a+\ln\frac{a}{b}\right)}{x}$.

(7) $y' = \sqrt{a^2+x^2}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

(10) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

§2　微分概念及其计算

1. 求下列函数在指定点的微分:((3) 小题见例 3-5)

(1) $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 求 $dy(0)$, $dy(a)$;

(2) $y = \sec x + \tan x$, 求 $dy(0)$, $dy\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $dy(\pi)$;

(4) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 求 $dy(0.1)$, $dy(0.01)$.

【解】 (1) $dy(0) = a_1 dx$, $dy(a) = [na_n a^{n-1} + (n-1)a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1]dx$.

(2) $dy(0) = dx$, $dy\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)dx$, $dy(\pi) = dx$.

(4) $dy(0.1) = -2100dx$, $dy(0.01) = -2010000dx$.

2. 求下列函数的微分:((3)(5) 小题见例 3-6)

(1) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$　　(2) $y = x\ln x - x$;

(4) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　(6) $y = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

【解】 (1) $dy = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$.　(2) $dy = \ln x dx$.

(4) $dy = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x^4}}dx$.　　(6) $dy = \sec x dx$.

3. 设 u, v 是 x 的可微函数, 求 dy:((1)(3) 小题见例 3-7)

(2) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

【解】 (2) $\mathrm{d}y=\dfrac{uu'+vv'}{u^2+v^2}\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}y=-(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}(uu'+vv')\mathrm{d}x$.

4. 求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$:((1)(3) 小题见例 3-8)

(2) $y=\ln(3t+1),\ t=\sin^2 x$；

(4) $y=\arctan u,\ u=(\ln t)^2,\ t=1+x^2-\cot x$.

【解】 (2) $\mathrm{d}y=\dfrac{3\sin 2x}{1+3\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}y=\dfrac{2(2x+\csc^2 x)\ln(1+x^2-\cot x)}{(1+x^2-\cot x)[1+[\ln(1+x^2-\cot x)]^4]}\mathrm{d}x$.

§3　隐函数与参数方程微分法

1. 求下列隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:((4)(7)(10) 小题见例 3-19)

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, b 为常数)；　　(2) $y^2=2px$ (p 为常数)；

(3) $x^2+xy+y^2=a^2$；　　(5) $y=x+\dfrac{1}{2}\sin y$；

(6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$($a$ 为常数)；　　(7) $y=\cos(x+y)$；

(8) $y=x+\arctan y$；　　(9) $y=1-\ln(x+y)+e^y$.

【解】 (1) $y'=\dfrac{b^2x}{a^2y}$.　　(2) $y'=\dfrac{p}{y}$.

(3) $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$.　　(5) $y'=-\dfrac{2}{-2+\cos y}$.

(6) $y'=-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.　　(7) $y'=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

(8) $y'=1+\dfrac{1}{y^2}$.　　(9) $y'=\dfrac{1}{-1+(e^y-1)(x+y)}$.

2. 求下列参数方程的导数：((3)(4) 小题见例 3-20)

(1) $\begin{cases}x=\dfrac{t}{1+t}\\ y=\dfrac{1-t}{1+t}\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=\cos^2 t\end{cases}$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx}=-2$. (2) $\frac{dy}{dx}=-1$.

3. 求函数 $y=y(x)$ 在指定点的导数：

(1) $y=\cos x+\frac{1}{2}\sin y$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$； (2) $ye^x+\ln y=1$, $(0,1)$；

(3) $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$, π 处； (4) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$ 在 $t=\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处.

【解】 (1) $y'\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}=-2$. (2) $y'\Big|_{(0,1)}=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi}=0$. (4) $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\sqrt{3}}{3}}=0$.

§4 高阶微商与高阶微分

1. 求下列函数在指定点的高阶导数：

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$, 求 $f''(1)$, $f'''(1)$, $f^{(4)}(1)$；

(2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f''(0)$, $f''(1)$, $f''(-1)$.

【解】 (1) $f''(1)=26$, $f'''(1)=18$, $f^{(4)}(1)=0$.

(2) $f''(0)=0$, $f''(1)=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $f''(-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

2. 求下列函数的高阶导数：((1)(3) 小题见例 3-9)

(2) $y=e^{-x^2}$, 求 y'''；

(4) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 $y''(0)$；

(5) $y=x^5\cos x$, 求 $y^{(50)}$；

(6) $y=x^3\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 求 $y^{(30)}$.

【解】 (2) $y'''=-4xe^{-x^2}(2x^2-3)$. (4) $y''(0)=0$.

(5) $y^{(50)}=-x(27636000-24500x^2+x^4)\cos x-50(5085024-23520x^2+5x^4)\sin x$.

(6) $y^{(30)}=\frac{1}{2}e^{-x}(24360-2610x+90x^2-x^3)+\frac{1}{2}e^x(24360+2610x+90x^2+x^3)$.

3. 求下列函数的 n 阶导数：(1) $y = a^x$；(2) $y = \ln x$.

【解】(1) $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$. (2) $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

4. 求下列函数的 n 阶导数：((1)(2)(4) 小题见例 3-10)

(3) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$；(5) $y = \ln\dfrac{x+2}{1-x}$；(6) $y = 2^x \ln x$.

【解】(3) $y = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x+2}\right)$,

$$y^{(n)} = \frac{1}{6}\left[(-1)^n\frac{n!}{(x-4)^{n+1}} - (-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

(5) $y = \ln|x+2| - \ln|1-x|$,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+2)^n} - \frac{1}{(x-1)^n}\right].$$

(6) $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (\ln x)^{(k)} (2^x)^{(n-k)} = 2^x \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k (\ln 2)^{n-k} C_n^k k!}{x^k}$.

5. 见例 3-11. 6. 见例 3-14.

7. 求下列函数的二阶微分：((3) 小题见例 3-12)

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$；(2) $y = x\arctan x$.

【解】(1) $dy = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}dx$, $d^2y = \dfrac{3}{4x^2\sqrt{x}}dx^2 - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}d^2x$.

(2) $dy = \left(\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)dx$,

$d^2y = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}dx^2 + \left(\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)d^2x$.

8. 求下列函数的三阶微分：((1) 小题见例 3-13)

(2) 设 $u(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $v(x) = \cos 2x$, 求 $d^3(uv)$, $d^3\left(\dfrac{u}{v}\right)$.

【解】(2) $d^3(uv) = \dfrac{-e^{\frac{x}{2}}}{8}[(47\cos 2x - 52\sin 2x)dx^3 - 4(\cos 2x - 4\sin 2x)d^3x + 6(15\cos 2x + 8\sin 2x)dx d^2x]$；

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8}\sec 2x\left\{4(1+4\tan 2x)dx^3 + \frac{1}{4}\sec^2 2x[12(49 - 15\cos 4x + 8\sin 4x)d^2x + (243 - 47\cos 6x\sec 2x - 52\sec 2x\sin 6x + 1484\tan 2x)dx^2]dx\right\}.$$

9. 求下列参数方程的二阶导数：((1)(6) 小题见例 3-22)

(2) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$;　　(3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$;　　(5) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

【解】 (2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{a}\csc^3 t$.　　(3) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\csc^4 \frac{t}{2}$.

(4) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2}{e^t(\cos t + \sin t)^3}$.　　(5) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$.

10. 求下列隐函数的二阶导数$\frac{d^2 y}{dx^2}$:((1)) 小题见例 3-21)

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.　　(3) $y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$.

【解】 (2) $y'' = \frac{2xy(a^3 + x^3 - 3axy + y^3)}{(ax - y^2)^3}$.

(3) $y'' = \frac{2x^2y[3 + 2x^4 - 2(x^4 - 3)y^2 + 3y^4]}{(1 + y^2)^3}$.

11. 见例 3-24.　14. 见例 3-25.

第五章　微分中值定理及其应用

§1　微分中值定理

1. 见例 3-28.　2. 提示:罗尔定理.　3. 见例 3-24.
4. 见例 3-26.　5. 见例 3-27.　6. 见例 3-31.
7. 见例 3-29.　8. 见例 3-30.　9. 见例 3-43.
10. 见例 3-33.　11. 见例 3-44.　13. 见例 3-38.
14. 见例 3-39.　15. 见例 3-42.　16. 提示:推论 5-2.

§2　洛必达法则

1. 求下列待定型的极限:(其他见例 3-45)

(20) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【解】 (20) 原式 $= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln|\tan x| - \ln|x|}{x^2}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}}{2x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{x\sec^2 x - \tan x}{2x^2\tan x}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{x\sec^2 x - \tan x}{2x^3}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x}{6x^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right\} = e^{\frac{1}{3}}.$$

2. 见例 3-52. 3. 见例 3-26 注.

4. 分子分母求导后没有极限，但是不能断定原极限不存在.

§3 函数的升降、凸性和函数作图

1. 见例 3-35.

2. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y = x^3 - 6x$; (2) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

(3) $y = 2x^2 - \ln x$; (4) $y = \frac{x^2-1}{x}$.

【解】 (1) 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 和 $[\sqrt{2}, +\infty]$ 上单调上升，在 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上单调下降.

(2) 在 $(0, 1]$ 上单调上升，在 $[1, 2)$ 上单调下降.

(3) 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调下降，在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调上升.

(4) 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调上升.

3. 参考课本 143 页例 4. 7. 见例 3-37. 14. 见例 3-36.

§4 函数的最大值最小值问题

2. 见例 3-40. 8. 见例 3-41.

第六章　不定积分

§1　不定积分的概念

1. 求下列不定积分:((4)(10)(13) 小题见例 4-1)

(1) $\int\left(x^5+x^3-\frac{\sqrt{x}}{4}\right)dx$;　(2) $\int(5-x)^3dx$;

(3) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;　(5) $\int\frac{3x^2}{1+x^2}dx$;

(6) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;　(7) $\int(2\sin x-4\cos x)dx$;

(8) $\int(3-\sec^2x)dx$;　(9) $\int(\tan^2x+3)dx$;

(11) $\int\frac{\tan x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx$;　(12) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;

(14) $\int(5^x+1)^2dx$;　(15) $\int\left[2^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{e^x}{5}\right]dx$;

(16) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;

(17) $\int\left(\cos x-\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

(18) $\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;　(19) $\int 2^{2x}3^xdx$;

(20) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}+\sin x\right)dx$.

【解】 (1) $\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}+C$.　(2) $-\frac{1}{4}(5-x)^4+C$.

(3) $\frac{1}{12}\sqrt{x}(24+18x^{\frac{1}{6}}+9x^{\frac{5}{6}}+8x)+C$.　(5) $3(x-\arctan x)+C$.

(6) $\frac{2}{3}\sqrt{x}(3+x)+C$.　(7) $-2\cos x-4\sin x+C$.

(8) $3x-\tan x+C$.　(9) $2x+\tan x+C$.

(11) $\sec x+C$.　(12) $\sin x-\cos x+C$.

(14) $\dfrac{4\cdot 5^x+25^x+x\ln 25}{\ln 25}+C.$

(15) $-\dfrac{e^x}{5}+\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C.$

(16) $e^x-2\sqrt{x}+C.$

(17) $\sin x-2\arctan x-\dfrac{1}{4}\arcsin x+C.$

(18) $\dfrac{4}{7}x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}+C.$

(19) $\dfrac{12^x}{\ln 12}+C.$

(20) $\dfrac{3}{2}\arcsin x-\cos x+C.$

2. 见例 4-2.

3. 已知 $f(x)$ 满足给定的关系式，试求 $f(x)$：((1)(3) 小题见例 4-3)

(2) $\dfrac{f'(x)}{x}=1\quad(x>0)$；

(4) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1\quad(f(x)>0)$.

【解】 (2) $f(x)=\dfrac{x}{2}+C.$ (4) $f(x)=Ce^x.$

§2 换元积分与分部积分法

1. 用凑微分法求下列不定积分：((2)(9)(14)(16)(18) 小题见例 4-4)

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{5x-6}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$；

(4) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}\right)dx$；

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3x^2}$；

(6) $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{2}}dx$；

(7) $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{2}}dx$；

(8) $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$；

(10) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

(11) $\displaystyle\int\tan x\,dx$；

(12) $\displaystyle\int\tan^5x\sec^2x\,dx$；

(13) $\displaystyle\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2x}dx$；

(15) $\displaystyle\int\cos^5x\,dx$；

(17) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}dx$；

(19) $\displaystyle\int\frac{x}{4+x^2}dx$；

(20) $\displaystyle\int\frac{x}{4+x^4}dx$；

(21) $\displaystyle\int\frac{5-4x}{3x-2}dx$；

(22) $\displaystyle\int\sin 2x\cos 3x\,dx$；

(23) $\displaystyle\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$；

(24) $\displaystyle\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$；

(25) $\displaystyle\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(26) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;　　(27) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

(28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;　　(29) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

(30) $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

【解】 (1) $\frac{1}{5}\ln(5x-6)+C$.　(3) $\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C$.

(4) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\arcsin\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}+C$.

(5) $\frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$.　　(6) $-2e^{-\frac{x}{2}}+C$.

(7) $-\frac{e^{-x^2}}{2}+C$.　　(8) $\ln(e^x+1)+C$.

(10) $\arctan e^x+C$.　　(11) $-\ln\cos x+C$.

(12) $\frac{\tan^6 x}{6}+C$.　　(13) $(-2+\sin x)\sec x+C$.

(15) $\frac{1}{240}(150\sin x+25\sin 3x+3\sin 5x)$.　　(17) $\ln\cos x+\ln\sin x+C$.

(19) $\frac{1}{2}\arctan(4+x^2)+C$.　　(20) $-\frac{1}{4}\arctan\frac{2}{x^2}+C$.

(21) $-\frac{4x}{3}+\frac{7}{9}\ln(3x-2)+C$.　　(22) $\frac{1}{10}(5\cos x-\cos 5x)+C$.

(23) $\frac{(\ln x)^3}{3}+C$.　　(24) $\cos\frac{1}{x}+C$.

(25) $\frac{\arcsin^3 x}{3}+C$.　　(26) $\frac{\arctan^2 x}{2}+C$.

(27) $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$.　　(28) $2\arctan\sqrt{x}+C$.

(29) $\arcsin e^x+C$.

(30) $\dfrac{2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}+C$.

2. 用换元积分法求下列不定积分:((3)(5)(8) 小题见例 4-5)

(1) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$;　　(2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

(4) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$;　　(6) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

(7) $\int e^{\sqrt{x+1}}dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

(10) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$;

(11) $\int \frac{x^5}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$;

(12) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}dx$.

【解】 (1) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]+C$.

(2) $-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$.

(4) $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{2+x-x^2}-\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{3}\right)+C$.

(6) $\frac{1}{2}\left[x(x-\sqrt{x^2-1})+\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]+C$.

(7) $2e^{\sqrt{1+x}}(\sqrt{1+x}-1)+C$.

(9) $-6x^{1/6}+2\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+6\arctan x^{\frac{1}{6}}+C$.

(10) $2\sqrt{x}-x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

(11) $-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}(8+4x^2+3x^4)+C$.

(12) $\frac{1+4x}{2(1+x)^2}+\ln(1+x)+C$.

3．用分部积分法求下列不定积分：((5)(8)(14)(17) 小题见例 4-6)

(1) $\int x^2\cos x\,dx$;

(2) $\int x^3\ln x\,dx$;

(3) $\int \ln x\,dx$;

(4) $\int \arctan x\,dx$;

(6) $\int x\arctan x\,dx$;

(7) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

(9) $\int \sec^5 x\,dx$;

(10) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$;

(11) $\int x\sin^2 x\,dx$;

(12) $\int x\cos^2 x\,dx$;

(13) $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)dx$;

(15) $\int(\arcsin x)^2dx$;

(16) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$;

(18) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$.

【解】 (1) $x^2\sin x+2x\cos x-\sin x+C$. (2) $\frac{1}{16}x^4(4\ln x-1)+C$.

(3) $x(\ln x-1)+C$.

(4) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

(6) $\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+C$.

(7) $-\frac{1+2\ln x}{4x^2}+C$.

(9) $\frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)+(3+2\sec^2 x)\sec x\tan x\right]+C$.

(10) $\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1-x}{1+x}+x\left(2-x\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right]+C$.

(11) $\frac{1}{8}[2x(x-\sin 2x)-\cos 2x]+C$.

(12) $\frac{1}{8}[\cos 2x+2x(x+\sin 2x)]+C$. (13) $x\ln\ln x+C$.

(15) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

(16) $\ln\sin x-x\cot x+C$.

(18) $\frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(8-12\ln x 9\ln^2 x)+C$.

4. 见例 4-7.

5. 求下列有理函数的积分:((4)(7) 小题见例 4-8)

(1) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

(2) $\int\frac{dx}{(1+x)(x^2+1)}$;

(3) $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$;

(5) $\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

(6) $\int\frac{x+4}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

(8) $\int\frac{2x-3}{x^2+2x+1}dx$;

(9) $\int\frac{dx}{x^2+4x+2}$;

(10) $\int\frac{dx}{8-2x-x^2}$.

【解】 (1) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-3\ln|x-1|+8\ln x-4\ln|1+x|+C$.

(2) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$.

(3) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-2\arctan x\right)+C$.

(5) $2\ln(x-4)-\ln(x-3)+C$.

(6) $\frac{1}{6}[5\ln(x-1)-9\ln(x+1)+4\ln(x+2)]+C$.

(8) $2\ln|x+1|+\frac{5}{x+1}+C$.

(9) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C$.

(10) $\frac{1}{6}\ln\frac{x+4}{x-2}+C$.

6. 求下列三角函数有理式的积分:((3)(5)(10)(11) 小题见例 4-10)

(1) $\int\frac{dx}{4+5\cos x}$;

(2) $\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}$;

(4) $\int\frac{\sec x\,dx}{(1+\sec x)^2}$;

(6) $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

(7) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(8) $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{1+\cos^2 x}$;

(9) $\int\tan^3 x\,dx$.

【解】 (1) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $x=2\arctan t$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, 于是

$$原式=\int\frac{1}{4+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{9-t^2}dt=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.$$

(2) $\frac{1}{6}\left(\arctan\frac{\cos x+2\sin x}{2\cos x+\sin x}-\arctan\frac{2\cos x+\sin x}{\cos x+2\sin x}\right)+C$.

(4) $\frac{(2+\sec x)\tan x}{3(1+\sec x)^2}+C$.

(6) $\frac{1}{3}\left[\ln\sin\frac{x}{2}+\ln(2+\cos x)-3\ln\cos\frac{x}{2}\right]+C$.

(7) $原式=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x+1-1}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}-I,$$

令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $x=2\arctan t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, 于是

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{2t-t^2+1}dt$$

$$=-\int\frac{1}{(1-t)^2-2}dt$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

故原式 $= \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right| + C.$

(8) $\cos x - 2\arctan(\cos x) + C.$　　(9) $\ln\cos x + \frac{\sec^2 x}{2} + C.$

7. 求下列无理函数的积分:((3)(5) (9) 小题见例 4-11)

(1) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;　　(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$;

(4) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$;　　(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$;

(7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$;　　(8) $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$.

【解】 (1) $-\frac{3\arctan\frac{4x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}} - \frac{3}{2}\ln(1+x^{\frac{1}{6}}) - \frac{9}{4}\ln(1-x^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{3}}) +$
$\ln x + C.$

(2) $\frac{1}{2}\left[x(x-\sqrt{x^2-1}) + \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right] + C.$

(4) $\frac{1}{3}[(x-1)^2+1]^{\frac{3}{2}} + \frac{x-1}{2}\sqrt{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x-1+$
$\sqrt{(x-1)^2+1}) + C.$

(6) $2\arcsin\sqrt{x} + C.$

(7) $-\frac{1}{4}(3+2x)\sqrt{1+x-x^2} - \frac{7}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C.$

(8) 原式 $= \int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$　$\left(令\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \tan t,\ |t| < \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sec t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}d\tan t = \frac{3}{4}\int \sec t\, d\tan t$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sec t\tan t - \int \tan^2 t\sec t\, dt\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sec t\tan t - \int(\sec^3 t - \sec t)dt\right)$$

$$= \frac{3}{8}\left[\sec t\tan t + \ln|\sec t + \tan t|\right] + C$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right|\right] + C.$$

8. 求下列三角函数有理式的积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(b-x)}}$；

(2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$；

(3) $\int x e^x \sin x\, dx$；

(4) $\int x e^x \cos x\, dx$；

(5) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$；

(6) $\int \tan x \tan(x+a)\, dx$；

(7) $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$；

(8) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x} dx$；

(9) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$；

(10) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$；

(11) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$；

(12) $\int e^{\sin x}\sin 2x\, dx$；

(13) $\int \arctan(1+\sqrt{x})\, dx$；

(14) $\int \frac{dx}{(1+2^x)^4}$.

【解】 (1) $-\arctan\left(\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right) + C$.

(2) $-\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{\beta x} + C$.

(3) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x - x\cos x + \cos x) + C$.

(4) $\frac{1}{2}e^x(x\cos x + x\sin x - \sin x) + C$.

(5) $\frac{\ln\sin(x+b) - \ln(x+a)}{\sin(a-b)} + C$.

(6) $[\ln\cos x - \ln\cos(x+a)]\cot a - x + C$.

(7) $-\frac{1}{9}\left[x^3 + 6x + 3(2+x^2)\sqrt{1-x^2}\arccos x\right] + C$.

(8) $x - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\tan x}{\sqrt{3}} + C$.

(9) $2(x-2)\sqrt{1+e^x} + 4\operatorname{arctanh}\sqrt{1+e^x} + C$.

(10) $x\tan\frac{x}{2} + C$.

(11) $\ln(\cos x+\sin x)+C$.

(12) $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$.

(13) $x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2\sqrt{x}+2)+C$.

(14) $\dfrac{11+15\cdot 2^x+6\cdot 4^x+6x(1+2^x)^3\ln 2-6(1+2^x)^3\ln(1+2^x)}{6\ln 2(1+2^x)^3}+C$.

第七章　定积分

§1　定积分的概念

1. 见例 4-13.　　4. 见例 4-31.

§2　定积分的基本性质

1. 见例 4-16.　　7. 见例 4-14.　　8. 见例 4-17.　　10. 见例 4-18.
11. 见例 4-19.

§3　微积分基本定理

1. 见例 4-20.　　2. 见例 4-15.　　4. 见例 4-27.　　5. 见例 4-28.

§4　定积分的计算

1. 计算下列定积分:((6)(7)(8)(9)(16)(18) 小题见例 4-21))

(1) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$;　　(2) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

(3) $\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} x\sqrt{2-5x}\,dx$;　　(4) $\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

(5) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$;　　(10) $\int_0^4 x(x+\sqrt{x})dx$;

(11) $\int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$;

(12) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$;

(13) $\int_0^1 x \arctan x dx$;

(14) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos^2 x dx$;

(15) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2 x dx$;

(17) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$;

(19) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx$;

(20) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3(1 - 5x^2)^{10} dx$.

【解】 (1) $\frac{1}{3} - \ln 2$.

(2) $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{125} - \frac{14}{375}$.

(4) $\frac{44}{3}$.

(5) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(10) $\frac{512}{15}$.

(11) $\frac{\pi}{4} - \arctan(\sin 1)$.

(12) 2.

(13) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

(14) $\frac{4\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$.

(15) $\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$.

(17) 0.

(19) $\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$.

(20) $\frac{1}{6600}$.

2. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$;

(2) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$;

(3) $\int_0^{2\pi} \cos^6 x dx$;

(4) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^7 x dx$;

(5) $\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$;

(6) $\int_0^1 (1 - x^2)^6 dx$.

【解】 (1) $\frac{128}{315}$. (2) $\frac{16}{15}$. (3) $\frac{5}{8}\pi$. (4) $-\frac{16}{35}$.

(5) 令 $x = a\cos t$，则 $dx = -a\sin t dt$，于是，

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^{2n} t \cdot (-a\sin t) dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$

$$= a^3 I_{2n+1} = a^3 \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.$$

(6) 由(5)题，原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{13} t\,\mathrm{d}t = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1024}{3003}$.

3. 见例 4-26.　　4. 见例 4-23.　　5. 见例 4-22.　　6. 见例 4-24.

7. 见例 4-25.　　8. 见例 4-29.　　9. 见例 4-30.

第八章　微积分的进一步应用

§1　泰勒公式

1. 写出下列函数在 $x = 0$ 的带皮亚诺余项的泰勒展开式：((1)(5)(6)(7)(8) 小题见例 3-46))

(1) e^{2x}；　(2) $\cos x^2$；　(3) $\ln(1-x)$；

(4) $\frac{1}{(1+x)^2}$；　(5) $\frac{x^3+2x+1}{x-1}$.

【解】 (1) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} + o(x^n)$.

(2) $\cos x^2 = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x^2)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{4n-4})$.

(3) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

(4) $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$.

(5) $\frac{x^3+2x+1}{x-1} = x^2 + x + 3 + \frac{4}{x-1}$

$= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 \cdots - 4x^n + o(x^n)$.

2. 写出下列函数在 $x = 0$ 的泰勒公式至所指的阶数：

(1) $e^{\sin x}$，(x^3)；　　(2) $\ln\cos x$，(x^6)；

(3) $\frac{x}{\sin x}$，(x^4)；　　(4) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$，$(x^4)$.

【解】 (1) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

(2) $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.

(3) $\frac{\sin x}{x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)$.

(4) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}=x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$.

3. 求下列函数在 $x=1$ 的泰勒展开式:((1)(2) 小题见例 3-47))

(3) $p(x)=x^3-2x^2+3x+5$.

【解】 (3) 由于 $p'(x)=3x^2-4x+3$, $p''(x)=6x-4$, $p'''(x)=6$, $p^{(k)}(x)=0$, $k\geqslant 4$.

$$\begin{aligned}p(x)&=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3\\&=7+2(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3.\end{aligned}$$

4. 确定常数 a, b 使 $x\to 0$ 时,

(1) $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$ 为 x 的 5 阶无穷小;

(2) $f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

【解】 (1) $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$. (2) $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$.

5. 利用泰勒公式求极限:((1)(2)(3)(5) 小题见例 3-48))

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+\sin x^2)}$.

【解】 (4) 原式 $=\frac{1}{4}$.

6. 见例 3-49. 7. 见例 3-50.

8. 设 $P(x)$ 为一 n 次多项式,

(1) 若 $P(a)$, $P'(a)$, …, $P^{(n)}(a)$ 皆为正数, 证明 $P(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上无根;

(2) 若 $P(a)$, $P'(a)$, …, $P^{(n)}(a)$ 正负号相间, 证明 $P(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上无根.

【证明】 (1) 由于 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则 $\forall k>n$, $p^{(k)}(x)=0$, 于是 $P(x)$ 在 $x=a$ 处的泰勒展开式:

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

由于 $P(a)$, $P'(a)$, …, $P^{(n)}(a)$ 皆为正数, 则 $\forall x>a$, 都有 $P(x)>0$, 故 $P(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上无根.

(2) 同(1) 类似, $P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = P(a) - P'(a)(a-x) + \frac{P''(a)}{2!}(a-x)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(a-x)^n.$$

同样由条件可得 $\forall x \in (-\infty, a)$，有 $P(x) > 0$，也就说明了 $P(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上无根.

9. 求证

(1) $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$ $(0 < \theta < 1)$；(2) e是无理数.

【证明】 (1) 由于 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{(n+1)}$，$\theta$ 在0与 x 之间，令 $x = 1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1,.$$

(2) 假设e是有理数，则 $e = \frac{p}{q}$，其中 p 和 q 为互质的整数，由

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$，知 $e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} > 0$，则

$$0 < n!\left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] = \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

由假设，当 $n > \max\{q, 3\}$ 时，数 $n!\left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$ 应为整数，它不可能在0与 $\frac{3}{n+1}$ 之间，因此矛盾，于是e必为无理数.

10. 见例3-51. 11. 见例3-53. 12. 见例3-54.

§2 微积分在几何与物理中的应用

1. 见例4-38. 2. 见例4-35. 6. 见例4-39. 8. 见例4-37.
9. 见例4-36. 10. 见例4-40. 11. 见例4-41. 18. 见例4-42.

第九章　再论实数系

§1　实数连续性的等价描述

1. 求数列$\{x_n\}$的上、下确界：((5) 小题见例 2-1)

(1) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$；　(2) $x_n = n[2 + (-2)^n]$；

(3) $x_{2k} = k$，$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{k}$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$；

(4) $x_n = [1 + (-1)^n]\frac{n+1}{n}$；　(6) $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

【解】 (1) $\sup\{x_n\} = 1$，$\inf\{x_n\} = x_1 = 0$.　(2) 无上确界，也无下确界.

(3) 无上确界，$\inf\{x_n\} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1$.

(4) $\sup\{x_n\} = x_2 = 3$，$\inf\{x_n\} = x_{2k-1} = 0$.

(6) $\sup\{x_n\} = 1$，$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x)$ 在 D 上定义，求证

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\} = -\inf\limits_{x\in D} f(x)$；　(2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\} = -\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

【证明】 (1) 设$\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\} = \beta$，则 $\forall x \in D$；$-f(x) \leqslant \beta \Rightarrow f(x) \geqslant -\beta$；$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in D$，$-f(x_0) > \beta - \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < -\beta + \varepsilon$. 从而

$\inf\limits_{x\in D} f(x) = -\beta = -\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}$，即$\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\} = -\inf\limits_{x\in D} f(x)$.

(2) 证法同(1).

3. 见例 2-2.

4. 试证收敛数列必有上确界和下确界，趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界，趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界.

【证明】 由于收敛数列必有界，由确界存在原理知，该数列必有上、下确界.

若 $x_n \to +\infty (n \to +\infty)$，则对于 $G = 1$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，当 $n > N$ 时，有 $x_n > G = 1$. 令 $m = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, 1\}$，则 $\forall n$，有 $x_n \geqslant m$，即$\{x_n\}$有下界，所以$\{x_n\}$有下确界. 类似可证，当 $x_n \to -\infty (n \to \infty)$ 时，$\{x_n\}$ 有上

确界.

5. 试分别举出满足下列条件的数列:

(1) 有上确界无下确界的数列; (2) 含有上确界但不含有下确界的数列; (3) 既含有上确界又含有下确界的数列; (4) 既不含有上确界又不含有下确界的数列, 其中上、下确界都有限.

【解】 (1) $\{x_n\}=\{-n\}$: $-1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots$;

(2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(3) $\{x_n\}$: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(4) $1, 2-1, \frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}, \cdots$.

§2 实数闭区间的紧致性

1. 见例 2-28. 2. 见例 2-26.

3. 用区间套定理证明单调有界数列必有极限.

【证明】 不妨设$\{x_n\}$为单调上升有界的数列, 则 $\exists a_1, b_1$, 使 $a_1\leqslant x_n\leqslant b_1$, $n=1, 2, \cdots$. 将区间$[a_1, b_1]$二等分. 若$\frac{a_1+b_1}{2}$是$\{x_n\}$的上界, 即 $\forall n$, 有 $x_n\leqslant\frac{a_1+b_1}{2}$, 则记 $a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$; 若$\frac{a_1+b_1}{2}$不是$\{x_n\}$的上界, 即 $\exists x_n\in\{x_n\}$, 使 $x_n>\frac{a_1+b_1}{2}$, 则记 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$.

由$\{x_n\}$的单调性, 可知$[a_2, b_2]$中含有$\{x_n\}$的某项以后所有的项, 继续做下去, 可得一区间套$\{[a_n, b_n]\}$, 在每个闭区间$[a_n, b_n]$中含有$\{x_n\}$的某项以后所有的项.

由闭区间套定理, 存在惟一实数 $r\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=r$. 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0$, 使得$[a_{n_0}, b_{n_0}]\subset(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. 又$[a_{n_0}, b_{n_0}]$中含有$\{x_n\}$的某项以后所有的项. 于是 $\exists N\in\mathrm{N}^+$, 当 $n>N$ 时, $x_n\in[a_{n_0}, b_{n_0}]\subset(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r$.

4. 试分析区间套定理的条件:若将闭区间列改为开区间列, 结果怎样?若将条件$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots$去掉或将条件 $b_n-a_n\to0$ 去掉, 结果怎样?

试举例说明.

【证明】 若将闭区间列改为开区间列，则可能找不到实数 $r \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$. 如：$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$，虽然 $\left(0, \frac{1}{n}\right) \supset \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，但是 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(a_n, b_n) = \phi$. 若将 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 去掉，则找到的 r 可能不惟一. 如：$\left\{\left[0, 1+\frac{1}{n}\right]\right\}$，虽然 $\left[0, 1+\frac{1}{n}\right] \supset \left[0, 1+\frac{1}{n+1}\right]$，但是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0, 1+\frac{1}{n+1}\right] = [0, 1]$，所以 r 不惟一. 若将 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ 去掉与去掉条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 所得结果一样.

5. 见例2-3.　6. 见例2-4.

7. 求证数列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是，$\{a_n\}$ 的任何子数列 $\{a_{n_k}\}$ 都有收敛的子数列.

【证明】 充分性. 因 $\{a_n\}$ 有界，故它的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也有界. 根据紧致性定理知，$\{a_{n_k}\}$ 必有收敛的子列.

必要性. 用反证法. 假设 $\{a_n\}$ 无界，则由第5题，$\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$：$x_{n_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$. 于是 $\{x_{n_k}\}$ 没有收敛的子数列. 矛盾.

8. 见例2-8.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界，求证存在 $c \in [a, b]$，对任给 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ 上无界.

【证明】 用反证法. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处局部有界，即 $\forall x \in [a, b]$，$\exists \delta_x > 0$ 和常数 $M_x > 0$，使得 $|f(t)| < M_x$，$\forall t \in O(x, \delta_x) \cap [a, b]$. 从而得到了闭区间 $[a, b]$ 的一个覆盖 $E = \{O(x, \delta_x) \mid x \in [a, b]\}$. 由有限覆盖定理，存在 E 的有限子覆盖，记为 $O_1(x_1, \delta_1)$，$O_2(x_2, \delta_2)$，…，$O_k(x_k, \delta_k)$. 取 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_k\}$，由于 $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} O_i(x_i, \delta_i)$，故 $\forall x \in [a, b]$，$|f(x)| < M$，即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. 矛盾.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有第一类间断点，定义 $\omega(x) = |f(x-0) - f(x+0)|$. 求证对任意 $\varepsilon > 0$，$\omega(x) \geqslant \varepsilon$ 的点 x 只有有限多个.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists \varepsilon_0 > 0$，$E = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) \geqslant \varepsilon_0\}$ 是无限集. 则 $\exists \{x_n\} \subset E$，$x_n \to r \in [a, b] (n \to \infty)$. 不妨设 $r \in (a, b)$. 从而在 r 的任何小邻域内都有无限多个第一类间断点，不妨设 $\{x_n\}$ 都在 r 的左侧附近. 又 $f(x)$ 在

$[a, b]$上只有第一类间断点，则 $\lim\limits_{x \to r^-} f(x)$ 存在，设为 A. 从而 $0 < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (r-\delta, r) \cap [a, b]$ 时，有 $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而 $\forall x', x'' \in (r-\delta, r)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 因 $x_n \to r$, 所以 $\exists x_N \in \{x_n\}$, 使 $x_N \in \left(r - \dfrac{\delta}{2}, r\right)$. 这时 $|f(x_N+0) - f(x_N-0)| \geqslant \varepsilon_0$. 分别在 x_N 两侧附近取 x'_N, x''_N, 使 x'_N, x''_N 同时属于 $(r-\delta, r)$, 且 $|f(x'_N) - f(x_N - 0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{4}$, $|f(x''_N) - f(x_N + 0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{4}$. 则

$$|f(x'_N) - f(x''_N)| \geqslant |f(x_N+0) - f(x_N-0)| - |f(x'_N) - f(x_N-0)| - |f(x''_N) - f(x_N+0)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

与 $|f(x'_N - f(x''_N)| < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾.

12. 见例 2-23.

§3 实数的完备性

1. 见例 2-24.

2. 见例 2-6.

3. 利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性：((3) 小题见例 2-8)

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \quad (|q| < 1, |a_k| \leqslant M)$;

(2) $x_n = 1 + \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

【解】 (1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in \mathrm{N}^+$, 考虑

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= |a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| \cdot |q^{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \cdot |q^{n+p}| \\ &\leqslant M \cdot |q|^{n+1}(1 + |q|^2 + \cdots + |q|^{p-1}) \\ &= \frac{M|q|^{n+1}(1-|q|^p)}{1-|q|} < \frac{M|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n > \frac{\ln[\varepsilon \cdot (1-|q|)] - \ln M}{\ln|q|} - 1.\end{aligned}$$

所以令 $N=\max\left\{\left[\dfrac{\ln[\varepsilon\cdot(1-|q|)]-\ln M}{\ln|q|}\right],1\right\}$，则 $\forall n>N$，$\forall m>N$ 都有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 于是 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<1$，$\forall p\in\mathbf{N}^+$，考虑

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right]\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon \\
&\Rightarrow n>\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}.
\end{aligned}
$$

若令 $N=\left[\dfrac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+1$，则 $\forall n>N$，$\forall m>N$，都有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

4. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$，时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

【证明】 必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\varepsilon$，有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 故当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

充分性. 在 x_0 的附近任取一以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，则对于 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall m>N$，有 $0<|x_n-x_0|<\varepsilon$，$0<|x_m-x_0|<\varepsilon$，由题设就有 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. 那么由柯西收敛原理，知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在. 由 $\{x_n\}$ 的任意性可知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.（海涅定理）

5. 证明 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x'-x_0|<\delta$，$|x''-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

【证明】 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 由第 4 题可知：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$. 当 $|x'-x_0|<\delta$，$|x''-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

6. 证明下列极限不存在：

(1) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$；　　　(2) $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$；

(3) $x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+n})$； (4) $x_n = \cos n$； (5) $x_n = \tan n$.

【证明】 (1) 取 $\epsilon_0 < \frac{1}{2}$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，取 $n = 3N-1$，$p=2$，那么，

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{3N-1}{3N+1}\cos\frac{2}{3}3N\pi + \frac{3N}{3N+2}\cos\frac{2}{3}(3N+1)\pi\right| \\
&= \left|\frac{3N-1}{3N+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3N}{3N+2}\right| \\
&= 1 - \frac{2}{3N+1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3N+2}\right) \geqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(2) 取 $\epsilon_0 < 2-\sqrt{2}$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，取 $p=2$，$n=2N-1$，则

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|(1+2^{2N})^{\frac{1}{2N}} - \left(1+\frac{1}{2^{2N+1}}\right)^{\frac{1}{2N+1}}\right| \\
&\geqslant \frac{1}{2}[2\cdot 2 - 2\cdot \sqrt[2N+1]{2}] \geqslant \frac{4-2\sqrt{2}}{2} \\
&= 2-\sqrt{2} = \epsilon_0.
\end{aligned}
$$

故 $\{x_n\}$ 极限不存在.

(3) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，取 $n = 2N$，$m = 2N+1$，于是有

$$
2N + \frac{1}{4} \leqslant \sqrt{n^2+n} = \sqrt{(2N)^2 + 2N} \leqslant 2N + \frac{3}{4},
$$

即有 $x_n = \sin(1+\sqrt{n^2+n}) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $2N+1 \leqslant \sqrt{m^2+m} = \sqrt{(2N+1)^2 + (2N+1)} \leqslant 2N+2$，即有

$$
x_m = \sin(\pi\sqrt{m^2+m}) \leqslant 0,
$$

从而 $|x_n - x_m| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} = \epsilon_0$. 故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(4) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，可以找到自然数 n'_N 和 n''_N，使得 $\cos n'_N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos n''_N \leqslant 0$，且 $n'_N > N$，$n''_N > N$，因此 $\cos n'_N - \cos n''_N > \frac{1}{2} = \epsilon_0$. 故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(5) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，可以找到自然数 n'_N 和 n''_N，使得 $\tan n'_N \geqslant 1$，$\tan n''_N \leqslant 0$，且 $n'_N > N$，$n''_N > N$，因此 $\tan n'_N - \tan n''_N \geqslant 1 > \frac{1}{2} = \epsilon_0$.

故$\{x_n\}$不存在极限.

7. 见例2-7. 8. 见例2-9. 9. 见例2-10.

§4 再论闭区间上连续函数的性质

1. 见例2-11.

2. 设$f(x)$在$[a, b]$上连续, 可微; 又设

(1) $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) < p < \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$;

(2) 如果$f(x) = p$, 则有$f'(x) \neq 0$.

求证$f(x) = p$的根只有有限多个.

【证明】 用反证法. 假设$f(x) = p$的根有无穷多个. 由于它们是有界的, 则根据紧致性定理, 其存在收敛的子列$\{x_n\}: x_n \to x_0 \in [a, b]$, 又$f(x)$在$x_0$点连续, 那么就有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 而$\forall x_n$, 有$f(x_n) = p$, 也就有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = p$, 可得$f(x_0) = p$. 考虑$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. 由海涅定理, 有$f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. 矛盾.

3. 设$f(x)$在$[a, b]$连续, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, 求证存在$\xi \in (a, b)$, 使$f(\xi) = 0$, 且$f(x) > 0$ $(\xi < x \leqslant b)$.

【证明】 构造数集

$$E = \{c \mid c < b,\ x \in [c, b],\ f(x) > 0\}.$$

由$f(x)$的连续性及$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, 知, E非空且$\forall c \in E$, $a < c$, 即E有下界. 由确界存在原理知, E有下确界. 设$\xi = \inf E$. 下面证明$f(\xi) = 0$. 若不然, 则$f(\xi) > 0$或$f(\xi) < 0$. 不妨设$f(\xi) > 0$, 由$f(x)$的连续性知, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall x \in [\xi - \delta_0, \xi + \delta_0]$, 有$f(x) > 0$. 再由$\xi < \xi + \delta_0$及$E$的构造知, $\xi + \delta_0 \in E$. 因此当$x \in [\xi - \delta_0, \xi + \delta_0] \cup [\xi + \delta_0, b] = [\xi - \delta_0, b]$时, 有$f(x) > 0$. 故$\xi - \delta_0 \in E$, 这与$\xi = \inf E$矛盾. 对任意$x_0 \in (\xi, b]$, 取$c$使$\xi < c < x_0$, 则$c \in E$. 从而$\forall x \in [c, b]$, $f(x) > 0$, 当然$f(x_0) > 0$. 由x_0的任意性知, $\forall x \in (\xi, b]$, $f(x) > 0$.

5. 见例2-12. 6. 见例2-13. 7. 见例2-14.

8. 若函数$f(x)$在(a, b)上满足李普希兹条件, 即存在常数K, 使得$|f(x') - f(x'')| \leqslant K|x' - x''|$, $x', x'' \in (a, b)$. 证明: $f(x)$在(a, b)一

致连续.

【证明】 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2| < K \cdot \delta = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续.

9. 见例 2-15.　10. 见例 2-16.　11. 见例 2-17.　12. 见例 2-18.

13. 见例 2-19.

14. 求证 $f(x) = x\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

【证明】 由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x + 1) = +\infty$, 从而由第 13 题的结论知 $f(x) = x\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致连续.

§5　可积性

1. 判断下列函数在区间[0, 1]的可积性:((1)(2) 小题见例 4-33)

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

【解】 (3) 和 (4) 小题都是例 4-32 的特例. 其中第 (4) 小题也可以验证 $f(x)$ 在 [0, 1] 单调, 由定理 9-10 知 $f(x)$ 在 [0, 1] 可积.

2. 讨论 $f(x)$, $f^2(x)$, $|f(x)|$ 三者间可积性的关系.

【解】 ① 若 $f(x)$ 可积, 则 $f^2(x)$, $|f(x)|$ 可积. ② 若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 可积, 但 $f(x)$ 不一定可积. 例如函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ -1, & \text{若 } x \text{ 为有理数} \end{cases}$. ③ $f^2(x)$ 可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 可积.

3. 见例 4-51.　4. 见例 4-52.　5. 见例 4-53.　6. 见例 4-54.

7. 见例 4-55.　8. 见例 4-34.　10. 见例 4-56.　11. 见例 4-57.

12. 见例 4-58.

第十章　数项级数

§2　数项级数的收敛性及其基本性质

1. 求下列级数的和：((4)(6) 见例 7-11)

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}$.

2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$(发散)；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$(收敛)；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2n+1}$(发散)；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$(收敛)；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$(收敛).

3. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.（提示：对部分和数列应用数列极限的运算法则）

4. 参见例 7-2.

§3 正项级数

1. 判别下列级数的收敛性:((5)(6)(10)(11)(15)(17)(19) 见例 7-12, (16) 见例 7-49, (20) (21) 见例 7-47)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ln(n+1)}\right]^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$; (13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$;

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; (18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$; (20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$;

(21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$; (22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$; (23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$.

【解】 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{n}}=1$, 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 发散.

(2) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}}=\frac{1}{4}<1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$ 发散.

(4) 由于 $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2^n}\right)=1$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(7) 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0<1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

(8) 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 收敛.

(9) 由于 $\frac{2+(-1)^n}{2^n}<\frac{3}{2^n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(12) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}=\dfrac{1}{2}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ln n}{2^n}$ 收敛.

(13) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{n!2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}$ 收敛.

(14) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{n!3^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{3}{\mathrm{e}}>1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!3^n}{n^n}$ 发散.

(18) 由于当 n 充分大时，$\dfrac{1}{n^{\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln n}}$ 收敛.

(20) 解法二　由于 $2^{\ln n}=\mathrm{e}^{\ln 2^{\ln n}}=n^{\ln 2}$，由于当 n 充分大时，$\dfrac{1}{n^{\ln 2}}>\dfrac{1}{n}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\ln n}}$ 发散.

(21) 解法二　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛，判别方法与(20)相同.

(22) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^{\sqrt{n+1}}}\Big/\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}\right)=\dfrac{1}{3}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

(23) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3^{\sqrt{n+1}}}\Big/\dfrac{n}{3^{\sqrt{n}}}\right)=\dfrac{1}{3}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

2. 利用泰勒公式估算无穷小量的阶，从而判别下列级数的收敛性：((1)见例 7-20)

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n-1}{n+1}$.

【解】　令 $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n-1}{n+1}$，$n>1$，则 $a_n<0$，且

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=o\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right)$$，故仅当 $\dfrac{p}{2}+1>1$，即 $p>0$ 时，级数收敛.

3. 见例 7-5.　4. 见例 7-3.

5. 设 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n^2}, & n \neq k^2,\ k = 1, 2, \cdots \\ a_{k^2} = \dfrac{1}{k^2}, & n = k^2,\ k = 1, 2, \cdots \end{cases}$ 求证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \neq 0$.

【证明】 (1) 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$，令 $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$，$\lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{[\sqrt{n}]+1} \dfrac{1}{k^2}$，则 $S_n = \sigma_n + \lambda_n \leqslant 2\sigma_n$，由级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ 收敛知，$\exists M > 0$，$\forall n$，有 $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{M}{2}$，从而有 $S_n \leqslant M$，$\forall n$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 因为当 $n = k^2$，$na_n = 1$，$\forall k = 1, 2, \cdots$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \neq 0$.

6. 讨论下列级数的收敛性：((2) 小题见例 7-13，(4) 小题见例 7-52)

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$.

【解】 (1) 由于不论 p 为何数，当 x 充分大时，函数 $\dfrac{1}{x\ln^p x}$ 都是非负单调下降的，并且 $\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^p x} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-p)\ln^{p-1} x}\Bigg|_2^{+\infty}, & p \neq 1 \\ \ln\ln x \Big|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases}$ 仅当 $p > 1$ 时收敛，故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

7. 见例 7-51.

8. 设 $a_n \geqslant 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. 反之是否成立？

【证明】 利用前面章节的结果知，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. 反之不成立. 例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\sqrt[n]{2}} = \dfrac{1}{2}$. 但是 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & n \text{ 为偶数} \\ 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$. 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

9. 利用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 \quad (a > 1)$.

【证明】 (1) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\Big/\frac{n^n}{(n!)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n+1}\right]=0<1$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

(2) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2(n+1))!}{a^{(n+1)!}}\Big/\frac{(2n)!}{a^{n!}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n+1}}=0<1\ (a>1)$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0(a>1)$.

11. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛.

【证明】 由于 $\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛.

12. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$，求证(1) 当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛；(2) 当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 发散. 问 $l=1$ 时会有什么结论?

【证明】 (1) 由 $\lim_{n\to\infty}a_n=l>1$ 知，当 n 充分大时，$a_n>1$，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛；

(2) 由 $\lim_{n\to\infty}a_n=l<1$ 知，当 n 充分大时，$a_n<1$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 发散；

当 $l=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 的敛散性不定.

§4 一般项级数

1. 讨论下列级数的收敛性：((5)(6) 小题见例 7-14，(8)(14)(15)(16) 小题见例 7-15，(9)(10) 小题参考例 7-19)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$；

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$；　(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}(p>0)$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$；　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$；

(13) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$；

【解】 (1) 收敛． (2) 收敛． (4) 发散． (7) 当 $0<p\leqslant 1$ 时，条件收敛；当 $p>1$ 时，绝对收敛． (11) 收敛． (12) 收敛． (13) 发散．

2. 讨论下列级数是否绝对收敛或条件收敛:((3) 小题参考例 7-27, (4) 小题见例 7-53, (6) 小题见例 7-20, (7)(8) 小题参考例 7-18, (14) 小题参考例 7-50)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}(0<x<\pi)$；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^{n\sqrt{n}}(r>0)$； (13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$,

【解】 (1) 当 x 为负整数时，级数显然无意义；当 x 不为负整数时，条件收敛．

(2) 绝对收敛． (10) 当 $0<r<1$ 时，绝对收敛；当 $r\geqslant 1$ 时，发散．

(13) 当 $p>2$ 时绝对收敛；当 $p\leqslant 0$ 时发散；当 $1<p\leqslant 2$ 时条件收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时发散．

3. 见例 7-8． 4. 见例 7-4．

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，问能否断定 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛?研究例子

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ b_n=a_n+\frac{1}{n}.$$

【解】 由莱布尼茨判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}}\right]=1$．然而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，所以不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛．

6. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(B)$ 都收敛，且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,$

2, …)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛．若级数 (A) 与 (B) 都发散，问级数 (C) 收敛性如何？

【证明】 提示：对部分和数列应用夹逼原理即得证．若级数 (A) 与 (B) 均发散，则 (C) 可能收敛也可能发散．例如：$-1-1-1-\cdots$ 与 $1+1+1+\cdots$ 均发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0\ (-1 < c_n < 1)$ 时收敛；当 $c_n = \frac{1}{2}(-1 < c_n < 1)$ 时，(C) 发散．

7．证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，则当 $x > x_0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 发散，则当 $x < x_0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也发散．

【证明】 (ⅰ) 由于 $\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，且当 $x > x_0$ 时，$\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ 单调下降趋于 0，于是由阿贝尔判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x > x_0$ 时收敛．

(ⅱ) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 发散，考虑 $x < x_0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 的敛散性．假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 是收敛的，由于 $x_0 > x$，由(ⅰ)知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 也收敛，这与条件矛盾．故假设不成立，即有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x < x_0$ 时发散．

8．见例 7-6．　9．见例 7-7．　10．见例 7-4．　11．见例 7-16．

12．见例 7-9．　13．见例 7-48．

14．下列是非题，对的请给予证明，错的请举出反例：

(1) 若 $a_n > 0$，则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$ 收敛．

(2) 若 $a_n \to 0$，则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$ 收敛．

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛．

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 绝对收敛．

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 a_n 不趋于 0．　(8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛．

【解】 (1) 错. 如 $a_n=1$, $n=1,2,3,\cdots$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, 该级数是发散的.

(2) 正确(利用定义或柯西收敛原理).

(3) 错. 如 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(4) 对. 提示: 当 n 充分大时, $|a_n^3|\leqslant a_n^2$.

(5) 错. 如 $a_n=\frac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 但 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$.

(8) 错. 如: $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

第十一章　广义积分

§1　无穷限广义积分

1. (2)(4)(6) 小题见例 8-1, 其他略.

2. 讨论下列积分的收敛性:((2) 小题见例 8-3, (4)(10)(16) 小题见例 8-2)

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　　(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n,\ m>0)$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$;　　(8) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;

(9) $\int_1^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^n x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(12) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$;　　(14) $\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$;

(15) $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 收敛． (3) 收敛． (5) 发散． (6) 由于 n, $m>0$, 则 $f(x)=\dfrac{x^m}{1+x^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义．又 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}\dfrac{x^m}{1+x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=1$, 故原积分仅当 $n-m>1$ 时收敛． (7) 收敛． (8) 收敛． (9) 收敛． (11) 收敛． (12) $\dfrac{\sin^2 x}{x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos 2x}{x}\right)$, 积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散; $\forall A>1$, $\left|\int_1^A\cos 2x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$, 且当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 单调趋于0, 故由狄利克雷判别法知, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而原积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散． (14) 收敛． (15) 发散．

3．讨论下列无穷积分的收敛性(包括绝对收敛或条件收敛)：((2)(4)(7)小题见例 8-7)

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$; (3) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$．

【解】 (1) $\dfrac{\cos^2 x}{x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\cos 2x}{2x}$, 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛, 故原积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散．

(3) 当 $p>1$ 时, 由于 $\left|\dfrac{\cos x}{x^p}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 由狄利克雷判别法知, 积分收敛, 但 $\left|\dfrac{\cos x}{x^p}\right|\geqslant\dfrac{1}{2x^p}+\dfrac{\cos 2x}{2x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x^p}\mathrm{d}x$ 发散, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散．故 $0<p\leqslant 1$ 当时, 积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛; 当 $p\leqslant 0$ 时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散．

4．设 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$, $a\leqslant x<+\infty$, $h(x)$ 在任意有限区间 $[a, A]$ 可积, 又 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛．求证 $\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ 收敛．

【证明】 提示：应用无穷限积分的柯西收敛原理．

5．证明：若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．举例说明其逆不成立．

【证明】 因为 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 根据无穷限积分的柯西收敛原理, $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>\max\{0, a\}$, $\forall A''$, $A'>A$, 有 $\left|\int_{A'}^{A''}|f(x)|\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$．从而

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{A'}^{A''} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$，所以积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛．反之不成立，如$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，而$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散．

6．见例 8-5．　7．见例 8-4．　8．见例 8-36．

9．设 $f(x)$ 单调下降趋于零，$f'(x)$ 在$[0, +\infty)$ 连续．求证 $\int_1^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛．

【证明】 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}f(x) = [f(x)\sin^2 x]\Big|_0^{+\infty}$

$$- \int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{A\to+\infty} f(A)\sin^2 A - \int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x)$ 单调下降趋于 0，则 $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A) = 0$，于是 $\lim\limits_{A\to\infty} f(A)\sin^2 A = 0$．由狄利克雷判别法知，$\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ 收敛．于是积分$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛．

10．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在$[a, +\infty)$ 上的函数，且在任何有限区间$[a, A]$ 上可积．证明：若$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^{+\infty}[f(x) + g(x)]^2\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 也收敛．

【证明】　由于 $0 \leqslant |f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$，而$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，所以$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}[f^2(x) + g^2(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，于是由比较判别法知，$\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，从而$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛．又$[f(x) + g(x)]^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)$，故$\int_a^{+\infty}[f(x) + g(x)]^2\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}[f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)]\mathrm{d}x$ 收敛．

11．见例 8-42．

§2　瑕积分

1．下列积分是否收敛?若收敛求其值：((4) 小题见 8-6)

(1) $\int_0^{\frac{1}{2}}\cot x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$； (3) $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}}$.

【解】 (1) $\int_0^{\frac{1}{2}}\cot x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\eta\to0^+}\int_\eta^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}\sin x=+\infty$，所以该积分发散.

(2) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{\eta\to0^+}\left[\int_\eta^1\ln x\mathrm{d}x\right]=-1$，所以该积分收敛，其值为 -1.

(3) $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}}=\lim\limits_{\eta\to0^+}\int_0^{a-\eta}-\frac{\mathrm{d}(a-x)}{\sqrt{a-x}}=2\sqrt{a}$.

2. 讨论下列积分的收敛性：((2) (4) (5) 小题见 8-10，(6) 小题见 8-38，(8) (11) 小题见 8-8，(9) 小题见 8-9)

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$； (3) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$； (12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\sin x\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}$，显然 $x=0$ 是惟一的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=1$，故该积分收敛.

(3) $f(x)=\frac{\ln x}{1-x^2}$，由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-2x}=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有一个瑕点 $x=0$. 又 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}=0$，故原积分收敛.

(7) 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0$，所以 $x=0$ 不是 $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ 的瑕点，即其在 $[0,1]$ 内只有一个瑕点 $x=1$. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{1}{|\ln x|}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{-\frac{1}{x}}=1$，故原积分发散. (12) $f(x)=\cos x\ln\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内只有一个瑕点 $x=0$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}|\cos x\ln\sin x|=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\cos x(\sin x)^{\frac{1}{2}}|\ln\sin x|=0$，所以原积分收敛.

3. 判别敛散性：((1) 小题见 8-37，(4) (7) 小题见 8-11，(6) 小题见 8-14)

(2) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$； (5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$； (8) $\int_{-\infty}^0 e^x\ln|x|dx$.

【解】 (2) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=I_1+I_2$，

对于 I_1：由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x})=1$，故 $1-p<1$，即 $p>0$ 时，I_1 收敛.

对于 I_2：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(x^{p-1}e^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x}=0$，故对于任意 p 值，I_2 恒收敛.

于是，当 $p>0$ 时，原积分收敛.

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=I_1+I_2$.

对于 I_1：对于任意的 p，由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^q\frac{1}{x^p\ln^q x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x^p}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1$，故仅当 $q<1$ 且 $\forall p\in\mathbf{R}$ 时，I_1 收敛.

对于 I_2：① 若 $p>1$，取 $\alpha:1<\alpha<p$，对于任意的 q，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha\frac{1}{x^p\ln^q x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-\alpha}\ln^q x}=0$，于是此时 I_2 收敛.

② 若 $p\leqslant1$，$q<1$，由于 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，则此时 I_2 发散.

综上所述，当 $p>1$，$q<1$ 时，原积分收敛.

(8) 令 $-x=t$，则原式 $=\int_{+\infty}^0 e^{-t}\ln|-t|d(-t)=\int_0^1\frac{\ln t}{e^t}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{e^t}dt$ $=I_1+I_2$.

对于 I_1：由于 $\lim\limits_{t\to0^+}t^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\ln t}{e^t}\right|=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{e^t}\left|t^{\frac{1}{2}}\ln t\right|=0$，所以 I_1 收敛；

对于 I_2：由于 $\left|\frac{\ln t}{e^t}\right|\leqslant\frac{1}{e^t}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^t}dt=\int_1^{+\infty}-de^{-t}=-e^{-t}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}$，所以 I_2 收敛. 故原积分收敛.

4. 见例 8-12.　6. 见例 8-6.

7. 利用第 6 题结果，证明：

(1) $\int_0^\pi\theta\ln(\sin\theta)d\theta=-\frac{\pi^2}{2}\ln2$；

(2) $\int_0^\pi\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=2\pi\ln2$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln2\right)$;

(4) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln2$.

【证明】 (1) 令 $\theta=x-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\int_{\pi}^{0}(x-t)\ln\sin(x-t)d(x-t)$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-\int_0^{\pi}t\ln\sin t\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\ln\sin\theta d\theta-I,$$

解得 $I=-\frac{\pi^2}{2}\ln2$.

(2) $I=\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\theta}{1-\cos\theta}d(1-\cos\theta)=\int_0^{\pi}\theta d\ln(1-\cos\theta)$

$$=\pi\ln2-\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\pi\ln2-\int_0^{\pi}\ln2d\theta-2\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\ln\sin t\,dt=2\pi\ln2.$$

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\ln(\sin\theta)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\theta)d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\ln(\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\theta)d\sin2\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln2\right).$$

(4) 令 $x=\tan t$，则

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2t}\cdot\sec^2t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4} \right) \mathrm{d}t - \cos t \right] \mathrm{d}t.$$

令 $t = \frac{\pi}{4} - u$，有$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4} \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\cos u \mathrm{d}(-u) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t \mathrm{d}t$，

所以 $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

第十二章　函数项级数

§1　函数序列的一致收敛概念

1. 讨论下列函数序列在所示区域的一致收敛性：((7) 小题见例 7-54，(11) 小题见例 7-23)

(1) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$，$x \in (-\infty, +\infty)$；

(2) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$，(ⅰ) $x \in (-l, l)$；(ⅱ) $x \in (-\infty, +\infty)$；

(3) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$，$x \in (0, 1)$；

(4) $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$，(ⅰ) $x \in [a, +\infty)$，$a > 0$，(ⅱ) $x \in (0, +\infty)$；

(5) $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1 + n^3x^3}$，(ⅰ) $x \in [a, +\infty)$，$a > 0$，(ⅱ) $x \in (0, +\infty)$；

(6) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}$，$x \in [0, 1]$；

(8) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$，$x \in [0, 1]$；

(9) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$，$x \in [0, 1]$；

(10) $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$，$x \in (0, 1)$；

(12) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$，(ⅰ) $x \in [-l, l]$；(ⅱ) $x \in (-\infty, +\infty)$.

【解】 (1) 在$(-\infty, +\infty)$内一致收敛于 $|x|$.

(2) (ⅰ) 在$(-l, l)$一致收敛于0；(ⅱ) 在$(-\infty, +\infty)$收敛而不一致收敛.

(3) 在(0, 1)收敛而不一致收敛.

(4) (i) 在$[a, +\infty)$一致收敛; (ii) 在$(0, +\infty)$收敛而却不一致收敛.

(5) (i) 在$[a, +\infty)(a>0)$一致收敛于0; (ii) 在$(0, +\infty)$不一致收敛.

(6) 在[0, 1]内一致收敛于x.

(8) 在[0, 1]收敛而不一致收敛.

(9) 在[0, 1]一致收敛于0.

(10) 在(0, 1)一致收敛于0.

(12) (i) 在$[-l, l]$一致收敛于0; (ii) $f_n(x)$在$(-\infty, +\infty)$不一致收敛.

2. 设$f_n(x)(n=1, 2, \cdots)$在$[a, b]$上有界, 并且$\{f_n(x)\}$在$[a, b]$一致收敛, 求证$f_n(x)$在$[a, b]$一致有界.

【证明】 已知$f_n(x)(n=1, 2, \cdots)$在$[a, b]$有界, 则$\exists M_n>0$, $\forall x\in[a, b]$, 有$\left|f_n(x)\right|\leqslant M_n$. 设$f_n(x)$在$[a, b]$一致收敛于$f(x)$. 则$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathrm{N}^+$, $\forall n>N$, $\forall x\in[a, b]$有$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$. 特别对$\varepsilon_0=1$, $\exists N_0\in \mathrm{N}^+$, $\forall x\in[a, b]$, $\left|f_{N_0+1}(x)-f(x)\right|<\varepsilon_0=1$, 从而$\left|f(x)\right|\leqslant 1+\left|f_{N_0+1}(x)\right|\leqslant 1+M_{N_0+1}$. 所以$\forall n>N_0$, $\forall x\in[a, b]$, $\left|f_n(x)\right|<1+\left|f(x)\right|\leqslant 2+M_{N_0+1}$. 取$M=\max\{M_1, M_2, \cdots, M_{N_0}, 2+M_{N_0+1}\}$, 则$\forall n\in \mathrm{N}^+$, $\forall x\in[a, b]$, 有$\left|f_n(x)\right|\leqslant M$, 即$f_n(x)$在$[a, b]$一致有界.

3. 设$f(x)$定义于(a, b), 令$f_n(x)=\dfrac{[nf(x)]}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 求证$\{f_n(x)\}$在(a, b)一致收敛于$f(x)$.

【证明】 由于$\forall \varepsilon>0$, $\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>N$时, $\forall x\in(a, b)$有$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\dfrac{[nf(x)]}{n}-f(x)\right|=\dfrac{\left|[nf(x)]-nf(x)\right|}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 因此, $f_n(x)$在(a, b)一致收敛于$f(x)$.

4. 见例7-25. 5. 见例7-55.

6. 问参数α取什么值时, $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$, $n=1, 2, 3, \cdots$在闭区间[0, 1]收敛?在闭区间[0, 1]一致收敛? 使$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$可在积分号下取极限?

【解】 ① 当$x=0$时, $\forall \alpha$, 均有$f_n(x)=0$; 当$x\neq 0$且$x\in(0, 1]$时,

$\forall\alpha$，均有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha x}{e^{-nx}}=0$. 因此，对于任意 α，$f_n(x)$ 在[0, 1]上收敛于函数 $f(x)=0$.

② 由于 $f'_n(x)=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\dfrac{1}{n}$ 时，$f'_n(x)=0$. 又由于当 $x<\dfrac{1}{n}$，$f'_n(x)>0$；当 $x>\dfrac{1}{n}$ 时，$f'_n(x)<0$；故 $x=\dfrac{1}{n}$ 为$f_n(x)$ 在[0, 1]上的最大值点，因此 $\rho_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}[f_n(x)-0]=\sup\limits_{x\in[0,1]}n^\alpha xe^{-nx}=n^{\alpha-1}e^{-1}$. 当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$ 时，$\rho_n\to0$. 于是，当 $\alpha>1$，$f_n(x)$ 在[0, 1]一致收敛于 0.

③ $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\int_0^1 xe^{-nx}dx=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(-\dfrac{1}{n}e^{-n}-\dfrac{1}{n^2}e^{-n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n})$.

要使$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx$，只要$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n})=0$. 从而当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限.

7. 证明序列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间[0, 1]上收敛，但

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

【证明】 当 $x=0$ 时，$\forall n$，$f_n(x)=0$；当 $x\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，$f_n(x)$ 在[0, 1]上收敛于 0. 由于$\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 e^{-nx^2}d(-nx^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-nx^2}\Big|_0^1=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)(e^{-n}-1)=\frac{1}{2}\neq0.$$

8. 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$(-\infty,+\infty)$一致连续，且$|f_n(x)|$ 在$(-\infty,+\infty)$一致收敛于 $f(x)$. 求证 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$一致连续.

【证明】 由$|f_n(x)|$一致收敛于 $f(x)$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 由 $f_{N+1}(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$一致连续知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$，有$|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)|<\varepsilon$. 于是有

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f_{N+1}(x_1)+f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)+f_{N+1}(x_2)-f(x_2)|$

$\leqslant |f(x_1) - f_{N+1}(x_1)| + |f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2)|\ |f_{N+1}(x_2) - f(x_2)|$
$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$.

9. 设$\{f_n(x)\}$是$[a, b]$上的连续函数列，且$\{f_n(x)$在$[a, b]$一致收敛于$f(x)$；又$x_n \in [a, b](n = 1, 2, \cdots)$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，求证$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_n)$.

【证明】 由于$f_n(x)$在$[a, b]$一致收敛于$f(x)$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathrm{N}^+$，$\forall n > N_1$，$\forall x \in [a, b]$有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 又$x_n \in [a, b]$且$x_n \to x_0$，故$x_0 \in [a, b]$. 于是$f_n(x)$在$x_0$连续，由海涅定理知对上述任意的$\varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in \mathrm{N}^+$，当$n > N_2$时，有$|f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. 取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则$\forall n > N$，有$|f_n(x_n) - f(x_0)| = |f_n(x_n) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

§2 函数项级数的一致收敛性及其判别法

1. 求出下列函数项级数的收敛区域(绝对的和条件的)：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{1 + a^{2n}x^2}$.

【解】 (1) 当$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$原函数绝对收敛.

(2) 在$(-\infty, -1) \cup \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$绝对收敛.

(4) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，若$|a| > 1$，则原函数绝对收敛；当$|a| \leqslant 1$时，原函数发散.

3. 讨论下列函数项级数的一致收敛性：((7) 小题见例 7-26)

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + n^4 x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(1 - \mathrm{e}^{-nx})}{n^2 + x^2}$, $x \in [0, +\infty)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{x + 2^n}$, $x \in (-2, +\infty)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1 + n^5 x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n}{n!}$, $x \in [0, 1]$;

(9) $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}}\right]$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, $|x| \geqslant r > 1$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 1$.

【解】 (1) $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛, 由 M- 判别法知, 原级数在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

(2) $\left|\frac{x}{1 + n^4x^2}\right| = \frac{1}{2n^2} \frac{|2n^2x|}{1 + n^4x^2} \leqslant \frac{1}{2n^2} \frac{1 + n^4x^2}{1 + n^4x^2} = \frac{1}{2n^2}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$收敛, 由 M- 判别法知, 原级数在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

(3) $\left|\frac{(-1)^n(1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}\right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数在$[0, +\infty)$一致收敛.

(4) 当 $n > 10$ 时, $\left|\frac{\sin nx}{x + 2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, $\forall x \in (-2, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$收敛, 所以原级数在$(-2, +\infty)$一致收敛.

(5) $\left|\frac{nx}{1 + n^5x^2}\right| = \left|\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \frac{2n^{\frac{5}{2}}x}{1 + n^5x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \frac{2n^{\frac{5}{2}}x}{1 + n^5x^2} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛, 于是原级数在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

(6) $\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})\right| \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot 2 \cdot 2^n = \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$. 而 $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = 0$, 由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$收敛. 于是原级数当$\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$一致收敛.

(8) 设 $a_n(x)=x^n\ln^n x$，则 $|a_n(x)|=|x^n\ln^n x|$，$x\in[0,1]$. 由 $(x\ln x)'=\ln x+1=0$，可得 $x=\frac{1}{e}$，从而 $|x\ln x|\leqslant\frac{1}{e}$，于是，$\forall n$，$\forall x\in[0,1]$，有 $|a_n(x)|\leqslant\left(\frac{1}{e}\right)^n\leqslant\frac{1}{e}$，且易见每个 $x\in[0,1]$，$|a_n(x)|$ 是单调下降数列. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛，当然在[0, 1]一致收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x^n\ln^n x|}{n!}$ 在[0, 1]一致收敛，由柯西原理得，原级数在[0, 1]一致收敛.

(9) 由于

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right|=\frac{\left|\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)-\left(x^2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\right|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}}$$

$$\leqslant\frac{\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}}{2\cdot\frac{1}{n}}=\frac{2n-1}{2n(n-1)^2}<\frac{1}{(n-1)^2}$$

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均成立，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，从而原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

(10) 由于 $\left|\frac{n}{x^n}\right|\leqslant\frac{n}{r^n}$，$|x|\geqslant r>1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{r^n}}=\frac{1}{r}<1$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $|x|\geqslant r>1$ 一致收敛.

(11) 由于 $\left|\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\right|=\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\leqslant\frac{nx}{nx^n}=\frac{1}{x^{n-1}}\leqslant\frac{1}{a^{n-1}}$，$\forall x\in[a,+\infty)$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}$ 当 $a>1$ 时收敛，由 M- 判别法知原级数在 $[a,+\infty)$ $(a>1)$ 一致收敛.

4. 讨论下列函数项级数的一致收敛性：((2) 小题见例 7-26)

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$, $x\in(-1,+\infty)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $x(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin\frac{1}{3^n x}$, $x\in(0,+\infty)$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, $|x|\leqslant a$.

【解】 (1) $\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2kx}{3}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$一致有界，且$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$单调下降一致趋于0. 由狄利克雷判别法知，原级数在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

(3) 由于$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，于是$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和一致有界，而$\left|\frac{1}{n+x}\right|\leqslant\frac{1}{n-1}\to 0(n\to\infty)$，且对每个固定的$x\in(-1,+\infty)$，$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$单调下降. 于是$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$单调一致趋于0. 由狄利克雷判别法知，原级数在$(-1,+\infty)$一致收敛.

(4) 由于$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，于是$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和一致有界. 而对每个固定的$x\in(-\infty,+\infty)$，$\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}$当$n\geqslant 2$单调下降，且$\left|\frac{1}{n+\sin x}\right|\leqslant\frac{1}{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$. 于是$\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}$单调一致趋于0，由狄利克雷判别法知，原级数在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

(5) 取$\varepsilon_0=1$，$\forall n$，取$x_n=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2}{\pi}>0$，则$\left|u_n(x_n)-0\right|=2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2^n\geqslant 2>1=\varepsilon_0$，即$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$不一致收敛于0. 所以原函数不一致收敛.

(6) 由于$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right|=\left|-1-1+1+1-\cdots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right|\leqslant 2$，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$的部分和一致有界. 又$\forall x\in[-a,a]$，$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\right\}$单调

下降，且$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \to 0$，$|x| \leqslant a$，所以$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\right\}$单调一致趋于0，因此由狄利克雷判别法知，原级数一致收敛.

5. 见例7-29.

6. 设每一项$\varphi_n(x)$都是$[a, b]$上的单调函数，如果$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a, b]$的端点为绝对收敛，那么这级数在$[a, b]$一致收敛.

【证明】 由假设$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$及$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$收敛. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}[|\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|]$收敛，又由$\varphi_n(x)$在$[a, b]$单调，故$|\varphi_n(x)| \leqslant |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$，$\forall x \in [a, b]$. 由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$绝对收敛；由$M$-判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a, b]$一致收敛.

7. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的一般项$|u_n(x)| \leqslant c_n(x)$，$x \in X$，并且$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)$在$X$一致收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$上也一致收敛且绝对收敛.

【证明】 因为$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)$在$X$一致收敛，由柯西原理，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，当$n > N$时，$\forall p \in \mathrm{N}^+$，$\forall x \in X$，都有$\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(x) \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(x)\right| < \varepsilon$. 由于$|u_n(x)| \leqslant c_n(x)$，$x \in X$，从而$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(x) < \varepsilon$，由柯西原理，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$也一致收敛且绝对收敛.

§3 和函数的分析性质

1. 研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$-1 < x < 1$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$-1 \leqslant x < 1$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，$|x| \leqslant 1$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 < x < +\infty$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$, $|x| > 0$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x| > 0$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$, $|x| > 0$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $|x| < \infty$.

【解】 (1) 因为 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \frac{1}{1-x}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 在$(-1, 1)$连续.

(2) $\forall x_0 \in [-1, 1)$. 在$\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$上, 由于 $\left|\sum_{k=1}^{n} x^k\right| = |x + x^2 + \cdots + x^n| = \left|\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right| \leqslant \max\left\{1, \frac{1+x_0}{2-x_0}\right\}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的部分和在$\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$一致有界, 而$\left\{\frac{1}{n}\right\}$当$n \to \infty$时关于$x \in \left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$单调一致趋于0, 于是$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$在$\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$一致收敛. 故$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$在$x = x_0$连续, 由$x_0$的任意性, 原级数在$[-1, 1)$连续.

(3) $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 由$M$-判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$在$[-1, 1]$一致收敛, 又$\forall n$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$在$[-1, 1]$连续, 故原级数在$[-1, 1]$连续.

(4) $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 由$M$-判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$在$(0, +\infty)$一致收敛. 又$\forall n$, $u_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$在$(0, +\infty)$连续, 故原级数在$(0, +\infty)$连续.

(5) $\forall x_0 \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$. 在$\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$上, $\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{4}{4+n^2x_0^2}$, 因为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4+n^2x_0^2}$收敛, 所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$在$\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$一致收敛.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $x=x_0$ 连续，由 x_0 的任意性知，原级数当 $|x|>0$ 时连续.

(6) $\left|\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\forall x$：$|x|<\infty$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 M- 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $|x|<\infty$ 一致收敛，又 $\forall n$，$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $|x|<\infty$ 连续，故原级数当 $|x|<\infty$ 时连续.

(7) $\forall x_0\neq 0$，不妨设 $x_0>0$. 在 $\left[\dfrac{x_0}{2},\dfrac{3x_0}{2}\right]$ 上，$\left|\dfrac{nx}{1+n^4x^2}\right|=\dfrac{x}{\dfrac{1}{n}+n^3x^2}\leqslant\dfrac{x}{n^3x^2}=\dfrac{1}{n^3x}\leqslant\dfrac{2}{n^3x_0}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^3x_0}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $\left[\dfrac{x_0}{2},\dfrac{3x_0}{2}\right]$ 一致收敛. 又 $\forall n$，$u_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $\left[\dfrac{x_0}{2},\dfrac{3x_0}{2}\right]$ 连续，特别地在 x_0 连续，由 x_0 的任意性知，原级数当 $|x|>0$ 时连续.

(8) 由于 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}=1-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$. 于是，$S(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

2. 求证 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，并有连续导函数.

【证明】 由于 $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^3}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 的收敛性，根据 M- 判别法，原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. 又 $\forall n$，$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，故 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续. 由于 $u'_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，根据函数项级数一致收敛的性质知，上述级数的和在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且有 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

3. 见例 7-56.　4. 参考例 7-22.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 连续，

求证

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$一致收敛；

(2) $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$连续.

【证明】 (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在(a, b)一致收敛，由柯西原理，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathrm{N}^+$，$\forall x \in (a, b)$，有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 由于 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$在$[a, b]$连续，特别地，在 $x = a$，$x = b$ 点连续，在上式中分别令 $x \to a$，$x \to b$ 得，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(b)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathrm{N}^+$，$\forall x \in [a, b]$，有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$一致收敛.

(2) 由(1)知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$一致收敛，又 $\forall n$，$u_n(x)$在$[a, b]$连续，于是根据和函数的连续性知，$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$连续.

6. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\lim\limits_{x \to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

【证明】 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geqslant 0$ 时一致收敛，而 $\forall x \in [0, \infty)$，$\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$单调下降且$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant 1$，即$\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$单调一致有界，由阿贝尔判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当$x \geqslant 0$时一致收敛. 而 $\forall n$，$\frac{a_n}{n^x}$ 在$[0, \infty)$连续，所以 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在$[0, \infty)$连续，从而 $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. 见例 7-11(2).

第十三章　幂级数

§1　幂级数的收敛半径与收敛区域

1. 求下列各幂级数的收敛域：((2) 小题见例 7-31，(3) 小题见例 7-58，(6) 小题见例 7-32)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$；　　(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}x^n$；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+7^n}$；　　(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；　　(13) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；　　(15) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n(0<a<1)$.

解　(1) $(-\infty,+\infty)$.　(4) $[-1,1]$.　(8) $(-e,e)$.　(9) $(-1,1]$.　(10) $(-7,7)$.　(11) $(-4,4)$.　(12) $(-1,1)$.　(13) $[-1,1)$.　(14) $(-\infty,\infty)$.　(15) $(-\infty,\infty)$.

2. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 收敛半径为 Q. 讨论下列级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nx^n$.

【解】　(1) 由条件知，当 $x^2<R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛；当 $x^2>R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$.

(2) 若 $R=Q$，则当 $|x|<Q$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$

收敛；当 $|x|>Q$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 都发散，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 可能收敛也可能发散．所以这时 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径可以是 $[Q,+\infty)$ 内的一切值．若 $R\neq Q$．不妨设 $R>Q$，则当 $|x|<Q$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 收敛．当 $R>|x|>Q$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 发散，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 发散．由阿贝尔第一定理知，当 $|x|>Q$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 发散．所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 Q．综上所述，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $\geqslant\min\{P,Q\}$．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径 $\geqslant RQ$．

3．设 $\left|\sum_{k=0}^{n}a_kx_1^k\right|\leqslant M(n=0,1,2,\cdots;x_1>0)$，求证当 $0<x<x_1$ 时，有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛；

(2) $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\leqslant M$．

【证明】 (1) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n\cdot\left(\frac{x}{x_1}\right)^n$，而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$ 的部分和有界，且 $\left\{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right\}$ 单调下降趋于 0．于是由狄利克雷判别法知其收敛．

(2) 由于 $\forall n$，都有 $\left|\sum_{k=0}^{n}a_kx_1^k\right|\leqslant M$，故 $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\leqslant M$．

§2　幂级数的性质

1．见例 7-57．　2．见例 7-61．

3．用逐项微分或逐项积分求下列级数的和：((5) 小题见例 7-59，(7) 小题

见例 7-60，(9) 小题见例 7-33)

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$； (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

【解】 (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ -1\leqslant x<1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1$.

(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{x}+1+x^2\right)$，$x\in\mathrm{R}$，$x\neq0$；当 $x=0$ 时，原级数为 0.

第十四章　傅里叶级数

§1　三角级数与傅里叶级数

2. (3) 见例 7-43.　(8) 见例 7-40.　3. 见例 7-42.

第十五章　多元函数的极限与连续性

§1　平面点集

1. 见例 5-1.　2. 见例 5-2.

3. 判别下列平面点集哪些是开集、闭集、有界集或区域，并分别指出它们的聚点：((1)(3)(5)(7) 小题见例 5-3)

(2) $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq1\}$；　　(4) $E=\{(x,y)\mid xy=0\}$；

(6) $E=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\sin\frac{1}{x},\ x>0\right\}$；

(8) $E=\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$.

【解】 (2) 开集，聚点：R^2.　(4) 闭集，聚点：$\{(x,y)\mid xy=0\}$.

(6) 聚点：$\left\{(x, y)\middle| y=\sin\frac{1}{x}, x>0 \text{ 或 } x=0, |y|\leqslant 1\right\}$. (8) 闭集、聚点：$\varnothing$.

4. 见例 5-4. 5. 见例 5-4. 6. 见例 5-6. 7. 见例 5-7.

8. 见例 5-8. 9. 见例 5-9.

§2 多元函数的极限与连续性

1. 见例 5-10.

2. 求下列极限(包括非正常极限)：((1)(2)(3)(4)(5)(7)(13)(14) 小题见例 5-11)

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^x+e^y}{\cos x-\sin y}=2$；(提示：直接代入)

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(xy)}{x}=2$(提示：等价无穷小替换)

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2$；(提示：直接代入)

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{1}{2x-y}=\infty$；(提示：先求其倒数的极限，再利用无穷小和无穷大的关系来计算)

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy+1}{x^4+y^4}=+\infty$；(提示：同上)

(12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty$；(提示：同上).

3. 讨论下列函数在点(0, 0)的全面极限和两个累次极限：((1)(2)(3) 小题见例 5-12)

(4) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(5) $f(x, y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$；

(6) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$；

(7) $f(x, y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$；

(8) $f(x, y) = \dfrac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$.

【解】 (4) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ 不存在.

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ 不存在.

(8) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

4. 见例 5-13. 5. 见例 5-14.

6. 试作出函数 $f(x, y)$, 使当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时,

(1) 全面极限和两个累次极限都不存在;

(2) 全面极限不存在, 两个累次极限存在但不相等;

(3) 全面极限和两个累次极限都存在.

【解】 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$. (1) 取 $f(x, y) = \sin \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{y}$; (2) 取 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; (3) 取 $f(x, y) = xy$.

7. 讨论下列函数的连续范围:((5)(6)(9) 小题见例 5-15)

(1) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; (2) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$;

(3) $f(x, y) = [x + y]$; (4) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^3 + y^3}$;

(7) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数} \\ y, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$;

(8) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

【解】 (1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$. (2) $\{(x, y) \mid x \neq m\pi, y \neq k\pi, m \in N, k \in \mathrm{N}\}$.

(3) $\{(x, y) \mid x + y \notin \mathrm{N}\}$. (4) $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$.

(7) $\{(x, y) \mid y = 0\}$. (8) R^2.

8. 见例 5-16. 9. 见例 5-17. 10. 见例 5-18. 11. 见例 5-19.

12. 见例 5-20.

第十六章　偏导数与全微分

§1　偏导数与全微分的概念

1. 求下列函数的偏导数:((5)(6) 小题见例 5-21)

(1) $u = x^2\ln(x^2+y^2)$;　　　(2) $u = (x+y)\cos(xy)$;

(3) $u = \arctan\dfrac{y}{x}$;　　　(4) $u = xy + \dfrac{x}{y}$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^3}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$;

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(xy) - y(x+y)\sin(xy)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos(xy) - x(x+y)\sin(xy)$;

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$.

2. 见例 5-22.　3. 见例 5-23.

4. 求下列函数的全微分:

(1) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;　(2) $u = xe^{yz} + e^{-x} + y$.

【解】 (1) $du = \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(2) $du = (e^{yz} - e^{-x})dx + (xze^{yz} + 1)dy + xye^{yz}dz$.

5. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点(1, 0) 和(0, −1);

(2) $u = \ln(x+y^2)$ 在点(0, 1) 和(1, 1);

(3) $u = \sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$ 在点(1, 1, 1);

(4) $u = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 在点(0, 1).

【解】 (1) $du\big|_{(1,0)} = 0$, $du\big|_{(0,1)} = dx$;

(2) $du\big|_{(0,1)} = dx + 2dy$, $du\big|_{(1,1)} = \dfrac{dx}{2} + dy$;

(3) $du\big|_{(1,1,1)} = dx - dy$;　(4) $du\big|_{(0,1)} = dx$.

6. 见例 5-24.　7. 见例 5-25.　8. 见例 5-18.　9. 见例 5-27.

11. 见例 5-28.　12. 见例 5-29.　13. 见例 5-30.

16. 求下列函数指定阶的偏导数:((4)(5) 小题见例 5-31)

(1) $u = x^3\sin y + y^3\sin x$, 求$\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 y^3}$;

(2) $u = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$, 求所有三阶偏导数;

(3) $u = \sin(x^2+y^2)$, 求$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$;

(6) $u = \ln(ax+by)$, 求$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 y^3} = -6(\cos x + \cos y)$.

(2) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \dfrac{6y^2-2}{(1+y^2)^3}$.

(3) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -4x[2x^2\cos(x^2+y^2) + 3\sin(x^2+y^2)]$.

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -4y[2y^2\cos(x^2+y^2) + 3\sin(x^2+y^2)]$.

(6) $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = (-1)^{m+n-1}\dfrac{a^m b^n (m+n-1)!}{(ax+by)^{m+n}}$.

17. 验证下列函数满足: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. ((1) 小题见例 5-32)

(2) $u = x^2 - y^2$;　(3) $u = e^x\cos y$;　(4) $u = \arctan\dfrac{y}{x}$.

【证明】 (2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\cos y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x\cos y$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

18. 见例 5-33.

§2　复合函数与隐函数微分法

1. 求下列函数的所有二阶偏导数:((2)(4) 小题见例 5-34)

(1) $u = f(ax, by)$;　　　　(3) $u = f(xy^2, x^2y)$;

(5) $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$;

(6) $u = f\left(x + y, xy, \frac{x}{y}\right)$.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = af_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = bf_2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 f_{11}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 f_{22}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = abf_{12}$.

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 f_1 + 2xyf_2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyf_1 + x^2 f_2$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^4 f_{11} + 2xy^3 f_{12} + 2xy^3 f_{21} + 4x^2y^2 f_{22} + 2yf_2$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xf_1 + 4x^2y^2 f_{11} + 2x^3 y f_{12} + 2x^3 y f_{21} + x^4 f_{22}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yf_1 + 2xy^3 f_{11} + x^2y^2 f_{12} + 2xf_2 + 4x^2y^2 f_{21} + 2x^3 y f_{22}$.

(5) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yzf''(x^2 + y^2 + z^2)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xzf''(x^2 + y^2 + z^2)$.

(6) $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yf_2 + \frac{1}{y} f_3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f_1 + xf_2 - \frac{x}{y^2} f_3$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + 2yf_{12} + \frac{2}{y} f_{13} + y^2 f_{22} + 2f_{23} + \frac{1}{y^2} f_{33}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11} + 2xf_{12} - \frac{2x}{y^2} f_{13} + x^2 f_{22} - \frac{2x^2}{y^2} f_{23} + \frac{2x}{y^3} f_3 + \frac{x^2}{y^4} f_{33}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11} + (x + y) f_{12} + \frac{y - x}{y^2} f_{13} + f_2 + xyf_{22} - \frac{1}{y^2} f_3 - \frac{x}{y^3} f_{33}$.

2. 见例 5-35.　3. 见例 5-36.　4. 见例 5-37.

5. 验证下列各式:((3)(4) 小题见例 5-38)

(1) $u = \varphi(x^2 + y^2)$, 则 $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(2) $u = y\varphi(x^2 - y^2)$, 则 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xu}{y}$.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\varphi'$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\varphi'$，所以 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\varphi'-2yx\varphi'=0$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\varphi'$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi-2y^2\varphi'$，$\varphi=\frac{u}{y}$.

所以 $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=2xy^2\varphi'+x\varphi-2xy^2\varphi'=x\varphi=\frac{xu}{y}$.

6. 见例 5-39. 7. 见例 5-40. 8. 见例 5-41. 9. 见例 5-42.

10. 见例 5-43.

11. 求下列方程所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数:((1) 小题见例 5-44)

(2) $x+y+z=e^{x+y+z}$； (3) $xyz=x+y+z$；

(4) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$.

【解】 (2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-1}{1-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-1}{1-xy}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x(xz-1)}{(1-xy)^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x-y+z+xyz}{(1-xy)^2}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2-z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y+1}{2-z}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)^2+(x-1)^2}{(2-z)^3}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(2-z)^2+(y+1)^2}{(2-z)^3}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(x-1)(y+1)}{(2-z)^3}$.

12. 求下列方程所确定的全微分 dz:((1)(3) 小题见例 5-45)

(2) $F(x-y,y-z,z-x)=0$； (4) $f(x,y)+g(y,z)=0$.

【解】 (2) $dz=\frac{(F_3-F_1)dx+(F_1-F_2)dy}{F_3-F_2}$.

(4) $dz=-\frac{f_x dx+(f_y+g_y)dy}{g_z}$.

13. 见例 5-46. 14. 见例 5-47. 15. 见例 5-82. 16. 求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:((4) 小题见例 5-48)

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^2+y^2=ax,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$；

(2) $\begin{cases}x-u^2-yv=0,\\ y-v^2-xu=ax,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$；

(3) $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y, \\ u - 2v^2 = x - 2y, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

【解】 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a - 2x}{2y}$, $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{a}{2z}$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2v + uy}{4uv - xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2u^2 + x}{xy - 4uv}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y + 2v^2}{xy - 4uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2u + xv}{4uv - xy}$.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{12v - 1}{8uv - 1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{3 - 2u}{8uv - 1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{4u + 2}{8uv - 1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{4u + 1}{8uv - 1}$.

17. 下面方程组定义了z为x, y的函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$. ((2) 小题见例5-49)

(1) $\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi, \\ y = \cos\theta\sin\varphi, \\ z = \sin\theta. \end{cases}$

【解】 (1) 对方程组$\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$关于$x$求偏导，得

$$\begin{cases} 1 = -\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 = -\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

同理，对方程组$\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$关于$y$求偏导，得

$$\begin{cases} 0 = -\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial y} - \cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 = -\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{-\cos\varphi}{\sin\theta} = -\cot\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \cos\theta\cdot\frac{-\sin\varphi}{\sin\theta} = -\cot\theta\sin\varphi.$$

§3 几何应用

1. 求下列曲线所示点处的切线方程和法平面方程：((1)(3) 小题见例5-63)

(2) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$, $z^2 = 3x^2 + y^2$, 在点$(1, -1, 2)$；

(4) $x = t - \cos t$, $y = 3 + \sin^2 t$, $z = 1 + \cos 3t$, 在点 $t = \dfrac{\pi}{2}$.

【解】 (2) 切线方程$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$;

法平面方程 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$.

(4) 切线方程为$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-1}{3}$, 法平面方程$2x+3z-3-\pi=0$.

2. 求下列曲面在所示点处的切平面方程和法线方程:((1)(2) 小题见例 5-64)

(3) $z=2x^2+4y^2$, 在点(2, 1, 12);

(4) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$, 在点 $P_0(u_0, v_0)$.

【解】 (3) 切平面方程 $8x+8y-z-12=0$; 法线方程$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-12}{-1}$.

(4) 法线方程$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$,

切平面方程$(a\sin v_0)x-(a\cos v_0)y+u_0z=au_0v_0$.

3. 见例 5-65. 4. 见例 5-66. 5. 见例 5-67. 6. 见例 5-68.

7. 见例 5-69.

§4 方向导数

1. 设 $f(x, y, z)=x+y^2+z^3$, 求 f 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 沿方向 $l=(2, -2, 1)$ 的方向导数.

【解】 $\frac{\partial f}{\partial l}=(1, 2, 3)\cdot\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

2. 求函数 $u=xyz$ 在点$A(5, 1, 2)$处沿到点 $B(9, 4, 14)$ 的方向$\overrightarrow{AB}$上的导数.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{98}{13}$, $l=\overrightarrow{AB}$.

3. 求$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)}$:

(1) $u=\ln(x^2+y^2)$, $(x_0, y_0)=(1, 1)$, l 与 x 轴正向的夹角为 60°;

(2) $u=xe^{xy}$, $(x_0, y_0)=(1, 1)$, l 与向量(1,1)同向.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$(在第一象限)，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$(在第四象限)；

(2) $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$e.

4. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微，单位向量 $l_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$l_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_1}=1$，$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_2}=0$，确定 l，使得 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

【解】 设 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)}=(a, b)$，则由已知

$$\begin{cases}\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=1\\ -\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

设 l 的方向余弦为 (u, v)，则有：

$$\begin{cases}u^2+v^2=1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v=\frac{7}{5\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=\frac{4}{5}\\ v_1=\frac{3}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}u_2=\frac{3}{5}\\ v_2=\frac{4}{5}\end{cases}$$

所以 l 的方向为 $l_1=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 或 $l_2=\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

5. 设 f 在 $P_0(2, 0)$ 可微，$f(x, y)$ 在 P_0 指向 $P_1(2, -2)$ 的方向导数是 1，指向原点的方向导数是 -3，试回答：

(1) 指向 $P_2(2, 1)$ 的方向导数是多少?

(2) 指向 $P_3(3, 2)$ 的方向导数是多少?

【解】 (1) $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{P_0P_2}}\Big|_{(2,0)}=-1$；(2) $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{P_0P_3}}\Big|_{(2,0)}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

第十七章　隐函数存在定理

§1　单个方程的情形

2. 见例 5-50.　3. 见例 5-51.　5. 见例 5-52.　6. 见例 5-53.

7. 见例 5-54.

§2 方程组的情形

1. 见例 5-55. 2. 见例 5-56. 3. 见例 5-57. 4. 见例 5-58.
5. 见例 5-59. 6. 见例 5-60. 8. 见例 5-61. 10. 见例 5-62.

第十八章 极值与条件极值

§1 极值与最小二乘法

1. 求下列函数的极大值和极小值点:((1)(2)(5) 小题见例 5-70)

(3) $f(x, y) = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}(a, b>0)$;

(4) $f(x, y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$;

(6) $f(x, y) = (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$.

【解】 (3) 极小值点$\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$和$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 极大值点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$和$\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

(4) 极小值点$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

(6) 极小值点$\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$.

2. 见例 5-71.

4. 求下列函数在指定范围 D 内的最大值和最小值:((1) 小题见例 5-72)

(2) $f(x, y) = x^2-xy+y^2$, $D=\{(x, y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$;

(3) $f(x, y, z) = (ax+by+cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, 其中 $a^2+b^2+c^2>0$, $D=\mathbf{R}^3$.

【解】 (2) 函数 f 在$(0, \pm 1)$和$(\pm 1, 0)$处有最大值1, 在$(0, 0)$处有最小值0.

(3) $\max_{(x,y)\in R^2}\{f(x,y)\} = f\left(\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\right)$

$= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2e}}$；

$\min_{(x,y)\in R^2}\{f(x,y)\} = f\left(\frac{-a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{-b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{-c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\right)$

$= -\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2e}}$；

5．见例 5-73．

7．求下列隐函数的极大值和极小值：

(1) $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$；

(2) $z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$．

【解】 (1) 极大值为$\frac{3}{2}$，极小值为$-\frac{3}{2}$．(2) 极大值为 3，极小值为 -3．

8．见例 5-74．

§2 条件极值与拉格朗日乘数法

1．求下列函数在所给条件下的极值：((1)(2)(3) 小题见例 5-75)

(4) $f=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，若 $x+y=2$；

(5) $f=xyz$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$；

【解】 (4) 在(1，1) 处取极小值．

(5) 在$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$处取极小值，在$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$处取极大值．

2．见例 5-76．

3．求函数 $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在条件 $x+y=l\ (l>0,\ n\geqslant 1)$ 之下的极值．

【解】 $z=f(x,y)$ 在条件 $x+y=l$ 下有极小值：$f\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)=\left(\frac{l}{2}\right)^n$．

4．求表面积一定而体积最大的长方形．

【解】 当长方体的长宽高都为表面积的$\frac{\sqrt{6}}{6}$倍时体积最大.

5. 求体积一定而表面积最小的长方形.

【解】 设长方体的体积为 V, 则当长宽高都为 $V^{\frac{1}{3}}$ 时, 表面积最小.

7. 见例 5-77.

8. 求原点到二平面 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ 的交线的最短距离.

【解】 当

$$x = \frac{-b_1^2a_2d_2 + b_1b_2(d_1a_2 + a_1d_2) + c_1a_1(d_1c_2 - c_1d_2) - a_1[d_1(b_2^2 + c_2^2) - c_1c_2d_2]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)},$$

$$y = \frac{b_1[(a_1a_2 + c_1c_2)d_2 - (a_2^2 + c_2^2)d_1] + b_2[a_1d_1a_2 - a_1^2d_2 + c_1(d_1c_2 - c_1d_2)]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)},$$

$$z = \frac{c_1[(a_1a_2 + b_1b_2)d_2 - (a_2^2 + b_2^2)d_1] + c_2[a_1d_1a_2 - a_1^2d_2 + b_1(d_1b_2 - b_1d_2)]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)}$$

时,到原点的距离最短. 最短距离为:

$$\sqrt{\frac{d_1(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2d_1d_2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + d_2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)}}.$$

9. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y = 1$ 间的最短距离.

【解】 最短距离为$\frac{9}{32}$, 对应的抛物线上的点是$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

10. 求 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 时函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的极大值.

【解】 当 $x = r$, $y = \sqrt{2}r$, $z = \sqrt{3}r$ 时, 函数 f 取极大值, $f_{\max} = 6\ln r + \ln 6\sqrt{3}$.

第十九章　含参变量的积分

§1　含参变量的正常积分

1. 求下列极限:((1)(3) 小题见例 8-15)

(2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\,dx$.

【解】 因 $x^2\cos ax$ 是连续函数，故 $F(a)=\int_0^2 x^2\cos ax\mathrm{d}x$ 是 $-\infty<a<+\infty$ 上的连续函数，故$\lim\limits_{a\to0}\int_0^2 x^2\cos ax\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to0}F(a)=F(0)=\dfrac{8}{3}$.

2. ((2) 小题见例 8-16).

4. 研究函数 $F(y)=\int_0^1\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 的连续性，其中 $f(x)$ 是$[0,1]$上连续且为正的函数.

【解】 当 $y\neq0$ 时，被积函数是连续的，因此，$F(y)$ 为连续函数；当 $y=0$ 时，$F(0)=0$；当 $y>0$ 时，设 m 为$f(x)$ 在$[0,1]$上的最小值，则 $m>0$，由于

$F(y)=\int_0^1\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\geqslant m\int_0^1\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\dfrac{1}{y}$ 及 $\lim\limits_{y\to0^+}F(y)=\arctan\dfrac{1}{y}=\dfrac{\pi}{2}$，故有 $\lim\limits_{y\to0^+}F(y)\geqslant\dfrac{m\pi}{2}>0$，于是，$F(y)$ 在 $y=0$ 不连续.

5. 应用积分号下求导法求下列积分：((1)(4) 小题见例 8-18)

(2) $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x\quad(|a|<1)$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x(a,\ b\neq0)$.

【解】 (2) 当 $|a|<1$ 时，由于 $1-2a\cos x+a^2\geqslant1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0$，故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，从而可在积分号下求导数，有

$$
\begin{aligned}
I'(a)&=\int_0^\pi\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x\left(\text{令 } t=\tan\frac{x}{2}\right)\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{a^2-1}{a}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x}\\
&=\frac{\pi}{a}+\frac{a^2-1}{a}\int_0^\infty\frac{2}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}t\right)\Big|_0^\infty=0.
\end{aligned}
$$

于是 $I'(a)=0$，则 $I(a)=C$，而 $I(0)=0$，故 $C=0$，从而

$$I(a)=\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=0.$$

(3) 令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$，先设 $a>0$，$b>0$，有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x.$$

若 $a=b$，有 $I'(b)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2b}$；

若 $a\neq b$，设 $t=\tan x$，得

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\tan^2x}{a^2\tan^2x+b^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

从而 $I(a)=\pi\ln(a+b)+C\ (a>0)$. 令 $a=b$，得 $I(b)=\pi\ln 2b+C$，而 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2\mathrm{d}x=\pi\ln b$，于是 $C=\pi\ln\frac{1}{2}$，从而 $I(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}(a>0)$. 若 $a<0$ 或 $b<0$，则可转化为 $a>0$，且 $b>0$ 的情形，得 $I(a)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.

综合可得，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.

6. 见例 8-19.

7. 设 $f(x)$ 为可微函数，求下列函数的二阶导数：((2) 小题见例 8-22)

(1) $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$.

【解】 (1) $F'(x)=2xf(x)+\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$，所以 $F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$；

8. 见例 8-21.

9. 设 $F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$，问是否成立

$$F'(0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0}\mathrm{d}x.$$

【解】 不成立. 事实上，当 $y\neq 0$ 时，

$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\arctan\left(\frac{1}{y}\right)$，$F(0)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$，由此可知，$F'_+(0)=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\ln\sqrt{1+y^2}+y\arctan\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=\dfrac{\pi}{2}$.

同理可得，$F'_-(0)=-\frac{\pi}{2}$，故 $F'(0)$ 不存在. 另一方面，当 $x>0$ 时，$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}=0$，故$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x=0$，由此可知，当 $y=0$ 时，不能在积分号下求导数.

10. 见例 8-23.

11. 设 $F(x)$ 为二次可微函数，$\varphi(x)$ 为可微函数，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

满足弦振动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$及初始条件 $u(x,0)=f(x)$，$u_t(x,0)=\varphi(x)$.

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[f'(x-at)(-a)+f'(x+at)a]+\frac{1}{2a}[\varphi(x+at)a-\varphi(x-at)(-a)]$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)a^2+f''(x+at)a^2]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)a^2-\varphi'(x-at)a^2]$，

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)\cdot 1+f'(x+at)\cdot 1]+\frac{1}{2a}[\varphi(x+at)\cdot 1-\varphi(x-at)\cdot 1]$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$，

故$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

另外，$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]+\frac{1}{2a}\int_x^x\varphi(z)\mathrm{d}z=f(x)$，

$u_t(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}[-af'(x)+af'(x)]+\frac{1}{2a}[a\varphi(x)+a\varphi(x)]=\varphi(x)$.

§2 含参变量的广义积分

1. 证明下列积分在指定区间内一致收敛：((4) 小题见例 8-26，(5) 小题见例 8-27)

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \quad (x \geqslant a > 0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\mathrm{d}y \quad (-\infty < x < +\infty)$.

【证明】 (1) $\left|\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{a^2+y^2}$, $\forall y \in [0, +\infty)$, $\forall x \in [a, +\infty)$, 而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+y^2}$收敛，因此$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$在$[a, +\infty)$一致收敛.

(2) 提示：$\left|\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+y^2}$;

(3) $0 \leqslant y^x\mathrm{e}^{-y} \leqslant y^b\mathrm{e}^{-y}(a \leqslant x \leqslant b,\ y \geqslant 1)$，由于$\lim\limits_{y\to+\infty} y^2 \cdot y^b\mathrm{e}^{-y} = 0$，故积分$\int_1^{+\infty}y^b\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$收敛，从而$\int_1^{+\infty}y^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$在$[a, b]$一致收敛.

2. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性：((1)(3) 小题见例 8-24)

(2) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$, (ⅰ) $x \in [a, b](a > 0)$, (ⅱ) $x \in [0, b]$;

(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,\mathrm{d}y \ (0 < x < +\infty)$.

【解】 (2) (ⅰ) 因为$\int_A^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{-xy}\Big|_A^{+\infty} = \mathrm{e}^{-xA} \leqslant \mathrm{e}^{-aA}$，而$\lim\limits_{A\to+\infty}\mathrm{e}^{-aA} = 0$，所以 $\forall \epsilon > 0$, $\exists A_0 > 0$，当 $A > A_0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-aA} < \epsilon$，从而当 $A > A_0$ 时，$\forall x \in [a, b]$，有$\left|\int_A^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right| \leqslant \mathrm{e}^{-aA} < \epsilon$，故$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$在$[a, b](a > 0)$一致收敛；

(ⅱ) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$在$[0, b]$不一致收敛. 事实上，要证 $\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall A_0 > 0$, $\exists A > A_0$和 $\exists x_0 \in [0, b]$，使得$\left|\int_A^{+\infty}x_0\mathrm{e}^{-x_0y}\mathrm{d}y\right| \geqslant \epsilon_0$，从$\int_A^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-xA}$知，只要取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2\mathrm{e}}$, $\forall A_0 > 0$，取 $A = A_0 + \frac{1}{b}$, $x_0 = \frac{1}{A} = \frac{1}{A_0 + \frac{1}{b}} \in [0, b]$，就有$\int_A^{+\infty}x_0\mathrm{e}^{-x_0y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-1} > \epsilon_0$，因此$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$在$[0, b]$不一致收敛.

(4) 积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,\mathrm{d}y$对任意固定的$x$都是收敛的，且当 $x > 0$ 时，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-x^2}$，但是它在$x \in (0, +\infty)$却不一致收敛. 事

实上，$\forall A>0$，当 $x>0$ 时，$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\int_{Ax}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(x\to 0^+)$，由此可知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy$ 在$(0<x<+\infty)$不一致收敛.

3. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 连续，$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 当 $\lambda=a$，$\lambda=b$ 时皆收敛，且 $a<b$. 求证$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 关于 λ 在$[a,b]$一致收敛.

【证明】

$I=\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}\cdot t^a f(t)dt+\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}\cdot t^b f(t)dt$，设 $I_1=\int_0^1 t^{\lambda-a}\cdot t^a f(t)dt$，$I_2=\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}\cdot t^b f(t)dt$，由条件知，$\int_0^1 t^a f(t)dt$ 收敛. 又 $\forall\lambda\in[a,b]$ 且固定，$t^{\lambda-a}$ 关于 t 是单调递增的，且 $|t^{\lambda-a}|\leqslant 1$ $(\lambda\in[a,b],\ t\in[0,1])$，由阿贝尔判别法知，$I_1$ 在$[a,b]$一致收敛. 类似方法可证，I_2 在$[a,b]$一致收敛. 故 $I=\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 在$[a,b]$一致收敛.

4. 讨论下列函数在指定区间上的连续性：((2) 小题见例 8-29)

(1) $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+y^2}dy$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

【解】 (1) 当 $x>0$ 时，$F(x)=\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$，显然是连续的；当 $x<0$ 时，$F(x)=\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{\pi}{2}$，连续；当 $x=0$ 时，$F(0)=0$，于是，当 $x=0$ 时，$F(x)$ 不连续.

5. 见例 8-25.

8. 利用微分交换次序计算下列积分：((1) 见例 8-45，(3) 见例 8-31)

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx$.

【解】 (2) 当 $m=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx=0$. 下面设 $m\neq 0$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx=0$，故 $m=0$ 不是瑕点，从而被积函数在 $0\leqslant x<+\infty$ 及 $a>0$，$b>0$ 内连续. 又由于 $\left|\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\right|\leqslant\frac{e^{-ax}+e^{-bx}}{x}(x>0)$，

而积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ax}+e^{-bx}}{x}dx=0$收敛，故积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx$收敛，从而积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx$收敛．当$a\geqslant a_0>0$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mx dx$是一致收敛的．事实上，$|e^{-ax}\sin mx|\leqslant e^{-a_0x}(x\geqslant 0)$，而积分$\int_0^{+\infty}e^{-a_0x}dx=\frac{1}{a_0}$收敛．于是，对于积分$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx$，当$a\geqslant a_0$时，利用莱布尼茨法则，得

$I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mx dx=-\frac{m}{a^2+m^2}$，由$a_0>0$的任意性，上式对一切$a>0$均成立．从而$I(a)=-\int\frac{m}{a^2+m^2}da=-\arctan\frac{a}{m}+C$．令$a=b$，得$I(b)=0=-\arctan\frac{b}{m}+C$，故$C=\arctan\frac{b}{m}$．最后得，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx=\arctan\frac{b}{m}-\arctan\frac{a}{m}$，$m\neq 0$．

10．利用$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$计算拉普拉斯积分$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx$和$L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx$．

【解】 ① $L=\int_0^{+\infty}\cos ax dx\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$，由于被积函数$\cos ax e^{-y(1+x^2)}$是$0\leqslant x<\infty$，$0\leqslant y<\infty$上的连续函数，并且绝对值的积分$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}|e^{-y(1+x^2)}\cos ax|dx\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx=\frac{\pi}{2}<+\infty$，故原逐项积分可交换次序，得$L=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos ax dx=\int_0^{+\infty}e^{-y}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{a^2}{4y}}dy$

$=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$；

② 由于$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cos ax}{1+x^2}\right)=-\frac{x\sin ax}{1+x^2}$，考虑积分$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx$，由于$\left|\frac{\cos ax}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$收敛，故$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx$当$a\in\mathbf{R}$时一致收敛，又由于当$a\geqslant a_0>0$时，$\left|\int_0^A\sin ax dx\right|=\left|\frac{1-\cos aA}{a}\right|\leqslant\frac{2}{a_0}$，而$\frac{x}{1+x^2}$

当 $x>1$ 时递减，且当 $x\to+\infty$ 时趋于 0，于是由狄利克雷判别法知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，可在积分号下求导数，得 $\frac{dL}{d\alpha}=-L_1$. 由 $\alpha_0>0$ 的任意性，上式对一切 $\alpha>0$ 均成立. 由①知当 $\alpha>0$ 时，$L=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$. 于是，$L_1=-\frac{dL}{d\alpha}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}(\alpha>0)$. 显然，当 $\alpha<0$ 时，$L_1=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha x)}{1+x^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{\alpha}$，当 $\alpha=0$ 时，$L_1=0$，综上所述，$L_1=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot e^{-|\alpha|}$.

11. 见例 8-37.

12. 利用已知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$； (2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy$；

(3) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx\ (a>0)$； (4) $\int_0^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx\ (a>0)$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx\ (a>0)$.

【解】 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=-\frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(1+x)+\sin y(1-x)}{y}dy$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(1+x)}{y}dy+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(1-x)}{y}dy.$$

当 $x=\pm1$ 时，原式 $=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2y}{y}dy=\frac{1}{4}$；当 $x\neq\pm1$ 时，

原式 $=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(1+x)}{y(1+x)}d(1+x)y+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(1-x)}{y(1-x)}dy(1-x)$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

(3) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}x^2e^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} d(\sqrt{a}x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}.$$

(4) $$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]} dx$$

$$= e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = e^{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2} dx$$

$$= 2e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2} dx$$

$$= 2e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+4a)} dx$$

$$= 2e^{-2a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}e^{-2a}.$$

13. 求下列积分:((1) 小题见例 8-30)

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx$.

解 (2) 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx$, 易知 $\frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 还可易证 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 收敛. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)} dx$ 在 $[a_0, +\infty)(a_0 > 0)$ 上一致收敛, 由 $a_0 > 0$ 的任意性知, $I(1) = \lim_{a \to 1^+} I(a)$, $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)} dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\frac{1}{1+ax^2}}{} + \frac{\frac{1}{a-1}}{1+x^2} + \frac{\frac{a}{1-a}}{1+ax^2}\right] dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-1} + \frac{\sqrt{a}}{1-a}\right)$, 从而 $I(a) = \pi\ln(1+\sqrt{a}) + C$, 由于 $I(0) = 0$, 得, $C = 0$. $I(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi\ln 2$.

14. 证明:

(1) $\int_0^1 \ln(xy)\mathrm{d}y$ 在$\left[\frac{1}{b}, b\right]$ $(b>1)$ 上一致收敛；

(2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^y}$ 在$(-\infty, b]$ $(b<1)$ 上一致收敛.

【证明】 (1) 令 $y=\frac{1}{t}$，则$\int_0^1 \ln(xy)\mathrm{d}y = \int_{+\infty}^1 \left(-\frac{1}{t^2}\right)\ln\frac{x}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\ln x-\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$，当 $x\in\left[\frac{1}{b}, b\right]$ $(b>1)$ 时，$\left|\frac{\ln x-\ln t}{t^2}\right| \leqslant \left|\frac{\ln\frac{1}{b}-\ln t}{t^2}\right| = \frac{\ln bt}{t^2}(t\geqslant 1)$，由于$\int_1^{+\infty}\frac{\ln bt}{t^2}\mathrm{d}t$ 收敛，故结论成立.

(2) 令 $x=\frac{1}{t}$，则$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^y} = \int_{+\infty}^1(-t^{y-2})\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}t^{y-2}\mathrm{d}t$，当 $y\in(-\infty, b](b<1)$ 时，$|t^{y-2}|\leqslant t^{b-2}$，而 $b<1$ 时，$b-2<-1$，从而知$\int_1^{+\infty}t^{b-2}\mathrm{d}t$ 收敛，故结论成立.

第二十章　重积分

§1　重积分的概念

1. 证明性质(4)，性质(6).

【证明】 性质(4)(重积分的单调性)：若 f 与 g 都在 D 内可积，且在 D 内的每点 P 都有 $f(P)\leqslant g(P)$，则 $\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(P)\mathrm{d}\sigma$. 证明如下：

对 D 的任意分法：$T=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}$ 和任意的$(\xi_i, \eta_i)\in\Delta\sigma_i$，有 $f(\xi_i, \eta_i)\leqslant g(\xi_i, \eta_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，因此 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \leqslant \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，令 $\lambda = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{d(\Delta\sigma_i)\}\to 0$ 取极限，由极限的不等式性质，得

$$\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(P)\mathrm{d}\sigma.$$

性质(6)(积分中值定理)：设 D 为有界闭区域(因而是连通的)，$f(P)$ 在 D

上可积，则存在 $P_0\in D$，使得$\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma = f(P_0)|D|$，其中$|D|$表示$D$的面积. 证明如下：

已知函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(P)$ 在 D 上必能取到最小值 m 与最大值 M，故 $m\leqslant f(P)\leqslant M$，$\forall P\in D$，所以 $m|D|\leqslant\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma\leqslant M|D|$，即 $m\leqslant\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma\leqslant M$. 根据连续函数的性质，在 D 上至少存在一点 P_0，使 $f(P_0)=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma$，$P_0\in D$，即$\iint\limits_D f(P)\mathrm{d}\sigma = f(P_0)\cdot|D|$.

2. 证明有界闭区域上的连续函数必可积.

【证明】 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 D 上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$，当 $r(P_1, P_2)<\delta$ 时，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

对任意分法 T，它将 D 分成 n 个小闭区域 D_1，$D_2\cdots$，D_n，则函数 $f(x, y)$ 在 D_k 上必能取到最大值 M_k 与最小值 m_k，即 D_k 上存在的点(ξ'_k, η'_k)与(ξ''_k, η''_k)，使

$$f(\xi'_k, \eta'_k)=M_k \text{与} f(\xi''_k, \eta''_k)=m_k(k=1, 2, \cdots, n),$$

所以，当 $\lambda=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{\mathrm{d}(D_i)\}<\delta$ 时，有

$\omega_k=M_k-m_k=f(\xi'_k, \eta'_k)-f(\xi''_k, \eta''_k)<\varepsilon\ (k=1, 2, \cdots, n)$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k<\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k=\varepsilon\cdot|D|$，所以 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

3. 设 Ω 是可度量的平面图形或空间立体，f，g 在 Ω 上连续，证明：

(1) 若在 Ω 上 $f(P)\geqslant 0$，且 $f(P)\not\equiv 0$，则$\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\Omega>0$；

(2) 若在 Ω 的任何部分区域 $\Omega'\subset\Omega$ 上，有$\int_{\Omega'} f(P)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega'} g(P)\mathrm{d}\Omega$，则在 Ω 上有 $f(P)\equiv g(P)$.

【证明】 (1) 函数 $f(x, y)$ 在 Ω 上的积分和是：$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\Omega_i$，易知 $f(\xi_i, \eta_i)\geqslant 0$，$\Delta\Omega_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 再由已知，$\exists P_0\in\Omega$，使得 $f(P_0)>0$. 又 $f(P)$ 在 Ω 上连续，则 $f(P)$ 在 P_0 点连续，从而存在 P_0 的某 δ 邻域

$O(P_0, \delta)$，使得 $\forall P \in O(P_0, \delta)$，有 $f(P) > \dfrac{f(P_0)}{2} > 0$，且应有 $P_0 \in \Delta\Omega_{i_0}(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$，并且当 $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n}\{d(\Delta\Omega_i)\}$ 充分小时，有 $\Delta\Omega_{i_0} \subset O(P_0, \delta)$. 此时有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i \geqslant f(P_{i_0})\Delta\Omega_{i_0} > \dfrac{f(P_0)}{2}\Delta\Omega_{i_0} > 0$，所以

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i = \int_{\Omega} f(P)\mathrm{d}\Omega > \frac{f(P_0)}{2}\Delta\Omega_{i_0} > 0.$$

(2)反证法. 假设在 P_0 点有 $f(P_0) \neq g(P_0)$，$P_0 \in \Omega$，则 $f(P_0) - g(P_0) \neq 0$，不妨设 $f(P_0) - g(P_0) > 0$. 由于 $f(P)$，$g(P)$ 在 Ω 上可积，则 $f(P) - g(P)$ 也在 Ω 上可积. 又因为 $f(P)$，$g(P)$ 在 Ω 上连续，所以 $f(P) - g(P)$ 在 Ω 上连续，所以，存在 P_0 的充分小的 δ 邻域 $\Omega' = O(P_0, \delta) \subset \Omega$，使得 $\forall P \in \Omega'$，都有 $f(P) - g(P) \geqslant \dfrac{f(P_0) - g(P_0)}{2} > 0$. 所以在 Ω' 上，由(1)可知 $\int_{\Omega'}[f(P) - g(P)]\mathrm{d}\Omega > 0$，这与 $\int_{\Omega'} f(P)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'} g(P)\mathrm{d}\Omega$ 相矛盾，所以 $f(P) \equiv g(P)$，$P \in \Omega$.

5. 若 $|f(x, y)|$ 在 D 上可积，那么 $f(x, y)$ 在 D 上是否可积?考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 若\ x, y\ 都是有理数 \\ -1 & 若\ x, y\ 至少有一个是无理数 \end{cases}$$

在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的积分.

【解】 不一定. 事实上，对 D 的任意分法 T，因为在 $[0, 1]$ 上的有理数与无理数是处处稠密的，所以每个小区域上既存在横、纵坐标皆为有理数的点又至少存有一个为无理数的点，如果在每个小区域上取横、纵坐标皆为有理数的点 P'_k，则积分和 $\sigma'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(P'_k)\Delta\sigma_k = 1$，如果取有一个坐标值为无理数的点 P''_k，则积分和为 $\sigma''_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(P''_k)\Delta\sigma_k = -1$，所以当 $\lambda \to 0$ 时，积分和的极限是不存在的，即 $f(x, y)$ 在 D 上不可积.

但是，在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上，$|f(x, y)| \equiv 1$，所以 $|f(x, y)|$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上是可积的.

6. 见例 6-1.

§2　重积分化累次积分

1. 计算下列二重积分:((1)(3) 小题见例 6-2)

(2) $\iint\limits_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times[0, \pi]$;

(4) $\iint\limits_D \frac{x}{1+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0, 1]\times[0, 1]$.

【解】 (2) -2.　(4) $2\ln2-1$.

2. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为不同顺序的累次积分:((2)(4) 小题见例 6-3)

(1) D 由 x 轴与 $x^2+y^2=r^2(y>0)$ 所围成;

(3) D 由 $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=1$ 和 $y=2$ 围成.

【解】 (1) $\iint\limits_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f\mathrm{d}y=\int_0^r\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f\mathrm{d}x$.

(3) $\iint\limits_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{(y/2)^{\frac{1}{3}}}^{y^{\frac{1}{3}}}f\mathrm{d}x=\int_{2^{-\frac{1}{3}}}^{1}\mathrm{d}x\int_1^{2x^3}f\mathrm{d}y+\int_1^{2^{-\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{2}f\mathrm{d}y$.

3. 改变下列累次积分的次序:((1)(3) 小题见例 6-4)

(2) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x, y)\mathrm{d}y$;

【解】 (2) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x, y)\mathrm{d}y=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_1^{y^2}f(x, y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}y\int_1^2 f(x, y)\mathrm{d}x$.

4. 见例 6-5.

5. 计算下列二重积分:((1)(2)(5)(7) 小题见例 6-6)

(3) $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $x^2+y^2\leqslant x$;

(4) $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $x^2+y^2\leqslant a^2$;

(6) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $x=y^2$, $x=0$, $x=2$, $y=2+x$ 所围成;

(8) $\iint\limits_{D} \sin nx \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x^2$，$y=4x$ 和 $y=4$ 所围成.

【解】 (3) $\frac{8}{15}$. (4) $\frac{a^4}{2}$. (6) $\frac{592}{15}-\frac{32\sqrt{2}}{27}$.

(8) $-\frac{4\sin n(n+\sin n-2n\cos n)}{n^3}$.

6. 求下列二重积分:((3) 小题见例 6-7)

(1) $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$; (2) $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

【解】 (1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}$. (2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

8. 计算下列三重积分:((1)(2)(3)(5) 小题见例 6-8)

(4) $\iiint\limits_{V} x^3yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成的位于第一卦限的有界区域;

(6) $\iiint\limits_{V} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

【解】 (4) $\frac{1}{192}$. (6) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

9. 改变下列累次积分的次序:((1)(4) 小题见例 6-9)

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$; (3) $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

【解】 (2) 原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+$

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

(3) 原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^0 \mathrm{d}z\int_1^2 f(x,y,z)\mathrm{d}x+$

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y-1}^{-y}\mathrm{d}z\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{-x+1}^0 \mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+$$

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{-x}^{-x+1}\mathrm{d}z\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

10. 求下列立体之体积:((1) 小题见例 6-10)

(2) V 由 $z \geqslant x^2+y^2$, $y \geqslant x^2$, $z \leqslant 2$ 所确定.

(3) V 是坐标平面及 $x=2$, $y=3$, $x+y+z=4$ 所围成的柱体.

【解】 (2) $\frac{5\sqrt{6}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\pi-\frac{6}{35}$. (3) $V=9$.

§3 重积分的变量代换

1. 用极坐标变换将 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分:((3)(4) 小题见例 6-11)

(1) D: 半圆 $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$;

(2) D: 半环 $a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2$, $x \geqslant 0$.

【解】 (1) $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$.

(2) $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\cos\theta) r\mathrm{d}r$.

2. 用极坐标变换计算下列二重积分:((1)(3) 小题见例 6-12)

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: 圆 $x^2+y^2 \leqslant x+y$ 的内部;

(4) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由阿基米德螺线 $r=\theta$ 和半射线 $\theta=\pi$ 围成;

(5) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由对数螺线 $r=e^\theta$ 和半射线 $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成.

【解】 (2) $\frac{\pi}{2}$. (4) $4-\pi^2$. (5) $\frac{1}{80}(1+e^{2\pi})$.

3. 在下列积分中引入新变量 u, v 将它们化为累次积分:((2)(3) 小题见例 6-13)

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{2-x} f(x, y)\mathrm{d}y$, 若 $u=x+y$, $v=x-y$;

(4) $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x, y) \mid x+y \leqslant a, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}(a>0)$, 若 $x+y=u$, $y=uv$.

【解】 (1) $\frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{d}u \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\mathrm{d}v$.

(4) $\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^1 f(u-uv,\ uv)\mathrm{d}v$.

4. 作适当的变量代换，求下列积分：((3) 小题见例 6-14)

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 $x^2+y^4=1$ 围成的区域；

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $y=4x^2$, $y=9x^2$, $x=4y^2$, $x=9y^2$ 围成.

【解】 (1) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 原式 $=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) 作变换 $u=\dfrac{x^2}{y}$, $v=\dfrac{y^2}{x}$.

5. 利用二重积分求下列曲面围成的立体的体积：((1)(6) 小题见例 6-15)

(2) $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$;

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的公共部分；

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}(z>0)$;

(5) $z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$, $2z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$.

【解】 (2) $\dfrac{2\pi}{3}R^2h$. (3) $\dfrac{8}{9}a^3$. (4) $\dfrac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$. (5) $2\pi(4\sqrt{2}-3)$.

6. 见例 6-16. 7. 见例 6-17. 8. 见例 6-18.

9. 作适当的变量代换，求下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{b}$, $xy=c$, $xy=d$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ 围成的立体，其中 $0<a<b$, $0<c<d$, $0<\alpha<\beta$;

(2) $\iiint\limits_V x^2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 同(1)；

(3) $\iiint\limits_V y^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $x=az^2$, $x=bz^2(z>0,\ 0<a<b)$, $x=\alpha y$, $x=\beta y(0<\alpha<\beta)$, 以及 $x=h(h>0)$ 围成；

(4) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 围成；

(5) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z$.

【解】 (1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{4}(d^4-c^4)\left(\beta-\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$.

(2) $\frac{2}{7}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(d^{\frac{7}{2}}-c^{\frac{7}{2}})\left[\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}+\frac{1}{3}(\beta^{-\frac{3}{2}}-\alpha^{-\frac{3}{2}})\right]$.

(3) $\frac{2}{13}h^{\frac{13}{2}}(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$.

(4) $4\pi abc(2-\mathrm{e})$.　(5) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

10. 见例 6-19.

§4　曲面面积

1. 求下列曲面的面积:((4) 小题见例 6-20)

(1) $z=axy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分;

(3) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分.

【解】 (1) 所围曲面在 Oxy 面上的投影为 $D=\{(x,y)\mid(x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 所以

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3a^2}[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1].$$

(3) 所围曲面在 Oxy 面上的投影为 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$, 所以

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

第二十一章　曲线积分与曲面积分

§1　第一型曲线积分与曲面积分

2. 计算下列第一型曲线积分:((1)(6)(9) 小题见例 6-21)

(2) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax$；

(3) $\int_L xyz\,ds$，其中 L 为螺线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt(0<a<b)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(4) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中 L 与(3) 相同；

(5) $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$，其中 L 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；

(7) $\int_L xy\,ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线；

(8) $\int_L (xy+yz+zx)\,ds$，其中 L 同(7)；

(10) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

【解】 (2) $2a^2$.　　(3) $\frac{-\pi a^2 b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) $\sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8}{3}b^2\pi^3\right)$.

(5) $4a^{\frac{2}{3}}$.　(7) $\frac{-\pi a^3}{3}$.　(8) πa.　(10) $2\pi a^2$.

3. 计算下列第一型曲面积分:((1)(5) 小题见例 6-22)

(2) $\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2}$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被平面 $z=0$ 和 $z=H$ 所截取的部分；

(4) $\iint_S z^2\,dS$，其中 S 为螺旋面的一部分：$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$ $(0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$.

【解】 (2) $2\pi\frac{H}{R}$. (4) $\frac{4}{3}\pi^3\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})\right]$.

4. 见例 6-23. 5. 见例 6-24.

6. 求螺线的一支 L: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 对 x 轴的转动惯量 $I=\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}s$. 设此螺线的线密度是均匀的.

【解】
$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\cdot\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\cdot\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cdot\frac{1-\cos2t}{2}+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\cdot\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\mathrm{d}t\\&=\left(\pi a^2+\frac{2}{3}\pi h^2\right)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}.\end{aligned}$$

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant1$ 的质量. 设此壳的密度 $\rho=z$.

【解】 $\frac{2\pi+12\pi\sqrt{3}}{15}$.

8. 见例 6-25.

9. 求均匀球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$ 对 z 轴的转动惯量.

【解】 $\frac{4}{3}\pi a^4\rho_0$.

10. 求均匀球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}(x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ x+y\leqslant a)$ 的重心坐标.

【解】 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\ \frac{\sqrt{2}}{4}a,\ \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$.

11. 若曲线以极坐标给出: $\rho=\rho(\theta)(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$, 试给出计算 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 的公式, 并用此公式计算下列曲线积分:

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中 L 是曲线 $\rho=a\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $\int_L x\mathrm{d}s$, 其中 L 是数螺线 $\rho=ae^{k\theta}(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

【解】 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}}\cdot\sqrt{0^2+a^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\cdot a\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}ae^a$;

(2) $\int_L x\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} e^{2k\theta}\cos\theta \cdot a e^{k\theta}\sqrt{1+k^2}\mathrm{d}\theta = a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0} e^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$,

令
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{0} e^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta = e^{2k\theta}\sin\theta\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2ke^{2k\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 2k\int_{-\infty}^{0} e^{2k\theta}\mathrm{d}\cos\theta \\ &= 2ke^{2k\theta}\cos\theta\Big|_{-\infty}^{0} - 4k^2\int_{-\infty}^{0} e^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 2k - 4k^2 I \Rightarrow I = \frac{2k}{4k^2+1}, \end{aligned}$$

于是原式 $= a^2\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2k}{4k^2+1} = \dfrac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}$.

12. 求密度 $\rho=\rho_0$ 的截圆锥面 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<b\leqslant r\leqslant a)$ 对位于曲面顶点 $(0, 0, 0)$ 的单位质点的引力. 当 $b\to 0$ 时, 结果如何?

【解】 $X=Y=0$, $Z=\int_a^b \dfrac{k\pi\rho_0\mathrm{d}r}{r} = k\pi\rho_0\ln\dfrac{b}{a}$. 若 $b\to 0$, 则 $Z\to +\infty$.

§2 第二型曲线积分与曲面积分

1. 计算下列第二型曲线积分:((4)(6) 小题见例 6-26)

(1) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加的方向;

(2) $\int_L \dfrac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 依逆时针方向;

(3) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 其中 L 为从 $(1, 1, 1)$ 到 $(2, 3, 4)$ 的直线段;

(5) $\int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$, L 为曲线 $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=at$ 从 $(1, 1, 0)$ 到 (e, e^{-1}, a).

【解】 (1) πa^2. (2) 0. (3) 13. (5) $2+\dfrac{a}{2}(e^2-e^{-2})$.

2. 见例 6-27.

3. ((1)(3) 小题见例 6-28) 求闭曲线 L 上的第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

(2) L 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，顺时针方向；

(4) L 是以$(-1,-1)$，$(1,-1)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形，顺时针方向．

【解】 (2) -2π． (4) 2π．

4．求力场 $\boldsymbol{F}$ 对运动的单位质点所作的功，此质点沿曲线 L 从 A 点运动到 B 点：((3)(4) 小题见例 6-29)

(1) $\boldsymbol{F}=(x-2xy^2,\ y-2x^2y)$，$L$ 为平面曲线 $y=x^2$，$A(0,0)$，$B(1,1)$；

(2) $\boldsymbol{F}=(x+y,\ xy)$，$L$ 为平面曲线$y=1-|1-x|$，$A(0,0)$，$B(2,0)$．

【解】 (1) 0． (2) $\frac{1}{3}$．

5．见例 6-30． 6．见例 6-31． 7．见例 6-32．

8．计算下列第二型曲面积分：((4)(5)(6) 小题见例 6-33)

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为$x=y=z=0$，$x=y=z=a$ 六个平面所围的正立方体边界的外侧；

(2) $\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是以原点为中心，边长为 2 的正立方体表面的外侧；

(3) $\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$S$ 为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分上侧；

(7) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧．

【解】 (1) a^4． (2) 24． (3) 0． (7) $\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$．

9．见例 6-34．

第二十二章　各种积分间的联系与场论初步

§1　各种积分之间的联系

1. 应用格林公式计算下列积分:((4)(5) 小题见例 6-35)

(1) $\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, 其中 L 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$取正向;

(2) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$, L 同(1);

(3) $\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$, L 是顶点为$A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ 的三角形的边界, 取正向.

【解】 (1) $\frac{1}{4}ab(a^2+b^2)\pi$.　(2) 0.　(3) $-46\frac{2}{3}$.

2. 利用格林公式计算下列曲线所围成图形的面积:((3) 小题见例 6-36)

(1) 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$;

(2) 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

【解】 (1) a^2.　(2) $\frac{3}{2}a^2$.

3. 利用高斯公式求下列积分:((1)(3) 小题见例 6-37)

(2) $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是单位球面的外侧;

(4) $\iint\limits_S (x-y^2z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

【解】 (2) $\frac{12}{5}\pi$.　(4) $4\pi R^3$.

4. 利用斯托克斯公式计算下列积分:((3) 小题见例 6-38)

(1) $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 其中

(a) L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, 方向是逆时针;

(b) L 为$y^2+z^2=1$, $x=y$所交的椭圆, 从 x 轴正向看去, 按逆时针方向.

(2) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$ 是从$(a, 0, 0)$经$(0, 0, a)$至$(0, a, 0)$回到$(a, 0, 0)$的三角形.

(4) $\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$ 是$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，从 x 轴正向看去圆周是逆时针方向.

【解】 (1) (a) $-\frac{1}{8}\pi a^6$，(b) 0.

(2) 原式 $=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_S(-1-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-1-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint\limits_{D_{xy}}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3a^2.$$

(4) $-\sqrt{3}\pi a^2$.

5.见例 6-39. 6.见例 6-40. 7.见例 6-41. 8.见例 6-42.

9.见例 6-43.

10. 求证 $\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\oiint\limits_S\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S$，其中 S 是包围 V 的分片光滑封闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向，$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 试对下列两种情形进行讨论：

(1) V 中不含原点$(0, 0, 0)$；

(2) V 中含原点$(0, 0, 0)$时，令 $\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\lim\limits_{\epsilon\to0^+}\iiint\limits_{V-V_\epsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$，其中 V_ϵ 是以原点为心，以 ϵ 为半径的球.

【证明】 (1) 设 V 中不含$(0, 0, 0)$，因为

$\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r}, x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r}, y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r}, z)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，且 $\cos(\boldsymbol{r}, x)=\frac{x}{r}$，$\cos(\boldsymbol{r}, y)=\frac{y}{r}$，$\cos(\boldsymbol{r}, z)=\frac{z}{r}$，故 $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$，由高斯公式，得

$$\oiint\limits_S\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\oiint\limits_S\left(\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V \left[\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V \frac{2}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

故
$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \frac{1}{2} \oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

(2) 设 V 中含原点(0, 0, 0)，这时，不能对 V 应用高斯公式，必须用一小区域将点(0, 0, 0)挖掉，即以点(0, 0, 0)为中心，充分小的 $\varepsilon > 0$ 为半径作一球域 V_ε，其边界(球面)以 S_ε 表示. 对闭域 $V - V_\varepsilon$，应用高斯公式，仿上可得：

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\boldsymbol{n}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = -1$，于是 $\iint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}S = -4\pi\varepsilon^2$，由此可知，在前式中含 $\varepsilon \to 0^+$ 取极限，即得 $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$.

11. 利用高斯公式变换以下积分：((2) 小题见例 6-44)

(1) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

【解】 (1) 0.

12. 设 $u(x, y)$，$v(x, y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数，并设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 证明：

(1) $\iint\limits_\sigma \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_l \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$；

(2) $\iint\limits_\sigma \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$；

(3) $\iint\limits_\sigma (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_l \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$.

其中 σ 为闭曲线 l 所围的平面区域，$\frac{\partial u}{\partial n}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 为沿 l 外法线的方向导数.

【证明】 (1) $\int_l \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s = \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)\right)\mathrm{d}s$

$$= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(t,y) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(t,x)\right)\mathrm{d}s$$

$$= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\sigma \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 由(1)

$$\oint_l v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s = \oint_l v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$= \iint_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是, $-\iint_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_l v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$

$$= -\iint_\sigma \left(\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\iint_\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\sigma \left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\sigma v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) $-\oint_l \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s = -\oint_l v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s + \oint_l u\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$

$$= -\oint_l v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \oint_l u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y - u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$= \oint_l \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y - \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \iint_\sigma (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

13. 设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, S 是 V 的边界曲面, 证明:

(1) $\iiint_V \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$;

(2) $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$

$$\iiint_V u\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

式中 u 在 V 及其边界曲面 S 上有连续的二阶偏导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的方向导数.

【证明】 (1) 由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，因此，由高斯公式，

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) $$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

14. 计算下列曲面积分：((2)(3) 小题见例 6-45)

(1) $\iint_S (x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 S 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z\geqslant 0)$，下侧；

(4) $\iint_S\left(\frac{x^3}{a^2}+yz\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{y^3}{b^2}+z^3x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{z^3}{c^2}+x^3y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(x\geqslant 0)$，后侧.

【解】 (1) 0. (4) $-\frac{6}{5}\pi abc$.

15. 见例 6-46. 16. 见例 6-47. 17. 见例 6-48.

18. 设 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 在全平面上有连续偏导数，而且以任意点 (x_0, y_0) 为中心，以任意正数 r 为半径的上半圆 $l: x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，恒有

$$\int_l P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0,$$

求证 $P(x, y)\equiv 0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$.

【证明】 由已知，对平面上任意一点(x_0, y_0)，以(x_0, y_0)为中心，任意$r>0$为半径作一上半圆域D，其上半圆周记为l，水平直径记为AB，则

$$\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{l+AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_M\cdot\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\cdot\frac{\pi}{2}r^2,$$

其中M为D内某一点．又$\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{AB}P(x, y)\mathrm{d}x=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x, y_0)\mathrm{d}x$
$=P(\xi, y_0)\int_{x_0-r}^{x_0+r}\mathrm{d}x=P(\xi, y_0)\cdot 2r\ (x_0-r\leqslant\xi\leqslant x_0+r)$，所以$P(\xi, y_0)$
$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_M\cdot\frac{\pi r}{4}$，此式对任意$r>0$都成立，两端令$r\to 0$取极限，得

$$P(x_0, y_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)}\cdot\frac{\pi\cdot 0}{4}=0.$$

由(x_0, y_0)的任意性，知$P(x, y)\equiv 0$．从而$\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_M=0$，令$r\to 0$得$\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}=0$，由$(x_0, y_0)$的任意性，这就证明了$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$．

§2　积分与路径无关

1．验证下列积分与路径无关，并求它们的值；((2)(5)(7) 小题见例 6-49)

(1) $\int_{(0,0)}^{(0,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$；

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 沿不通过原点的的路径；

(4) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 式中$f(u)$是连续函数；

(6) $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$；

(8) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$(x_1, y_1, z_1)$，$(x_2, y_2, z_2)$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上．

【解】 (1) 0. (3) ln10. (4) $\int_0^{a+b} f(u)\mathrm{d}u$. (6) 0. (8) 0.

2. 求下列全微分的原函数:((2)(3) 小题见例 6-50)

(1) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$;

(4) $(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$;

(5) $(\mathrm{e}^x\sin y+2xy^2)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2x^2y)\mathrm{d}y$;

(6) $\left[\dfrac{x}{(x^2-y^2)^2}-\dfrac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{(x^2-y^2)^2}+3y^2\right]\mathrm{d}y+5z^3\mathrm{d}z$.

【解】 (1) $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.

(4) $u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz+C$.

(5) $u(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y+x^2y^2+C$.

(6) $u(x,y,z)=-\ln x+\frac{2}{3}x^3+\ln y+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4+\frac{1}{2(y^2-x^2)}+C$.

3. 函数 $F(x,y)$ 应满足什么条件才能使微分式 $F(x,y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ 是全微分.

【解】 $xF'_y(x,y)=yF'_x(x,y)$.

5. 见例 6-51. 6. 见例 6-52. 7. 见例 6-53. 8. 见例 6-54.

9. 计算积分$\int_L x\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$, 其中 L 是被积函数的定义域内从点(2, 0)至(0, 2)的逐段光滑曲线.

【解】 0(提示:利用积分与路径无关).

§3 场论初步

1. 求 $u=x^2+2y^2+3z^2+2xy-4x+2y-4z$ 在点 $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(-1,-1,-1)$ 的梯度, 并求梯度为零的的点.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y-4$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y+2x+2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=6z-4$.

① 在 O 点, 有 $\mathrm{grad}u=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $|\mathrm{grad}u|=6$,

方向: $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$;

② 在 A 点, 有 $\mathrm{grad}u=8\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $|\mathrm{grad}u|=3\sqrt{17}$,

方向：$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$，$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$；

③ 在 B 点，有 $\mathrm{grad}u=-8\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$，$|\mathrm{grad}u|=6\sqrt{5}$，

方向：$\cos\alpha=\dfrac{-4\sqrt{5}}{15}$，$\cos\beta=\dfrac{-2\sqrt{5}}{15}$，$\cos\gamma=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$.

一般地，$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{(2x+2y-4)^2+(4y+2x+2)^2+(6z-4)^2}$，所以要 $|\mathrm{grad}u|=0$，只要$\begin{cases}2x+2y-4=0\\4y+2x+2=0\\6z-4=0\end{cases}$，解之，得 $x=-3$，$y=5$，$z=\dfrac{2}{3}$，即在点$\left(-3,5,\dfrac{2}{3}\right)$梯度为零.

2. 计算下列向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度：((2) 小题见例 6-55)

(1) $\boldsymbol{F}=(y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$；

(2) $\boldsymbol{F}=(x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2)$；

(3) $\boldsymbol{F}=\left(\dfrac{x}{yz},\ \dfrac{y}{zx},\ \dfrac{z}{xy}\right)$.

【解】 (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=2(y-z,z-x,x-y).$$

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=2xyz+2xyz+2xyz=6xyz$，

$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=(xz^2-xy^2,x^2y-yz^2,y^2z-x^2z)$.

(3) $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{x+y+z}{xyz}$，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(-\frac{z}{xyz}+\frac{y}{xz^2},-\frac{x}{yz^2}+\frac{z}{x^2y},-\frac{y}{x^2z}+\frac{x}{y^2z}\right).$$

附录 2　部分高校数学分析考研试题及模拟试题

(东北大学　1997 年)

一、(15 分)　设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，证明：

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续；

(2) $f'(x)$ 处处存在，但在 $x=0$ 处 $f'(x)$ 不连续；

(3) $f'(x)$ 在任何有限区间上均 Riemann 可积.

二、(20 分)　设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续，求证：

(1) $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在；

(2) 当 $f(a+0)=f(b-0)$ 时，必存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(x)$ 在 c 处取最大值或最小值.

三、(10 分)　设 $f(x)$ 在 $[a-h,a+h]$ 上连续，在 $(a-h,a+h)$ 上可微，其中 $h>0$ 是常数，证明：存在 $0<\theta<1$，使

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h).$$

四、(20 分)　1. 求由 $y^2=2px$，$y^2=2qx$，$x^2=2my$，$x^2=2ny$，$z=0$，$z=xy$ 所围成的体积. 其中 $0<p<q$，$0<m<n$ 是常数.

2. 设 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线. l，m，n 是常数，计算第一型曲线积分

$$\oint_C(lx^2+my^2+nz^2)\mathrm{d}s.$$

五、(20 分)　1. 证明：广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 处处收敛，且在任何有限区间 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上一致收敛，但在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上关于 α 非一致收敛.

2. 对任何 $\alpha>1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛.

六、(10分)　设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 是单调下降的非负连续函数，$g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛．求证：

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 存在 $\xi: a \leqslant \xi \leqslant +\infty$，使 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x$．

七、(5分)　设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上处处连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - Ax] = B$，其中 A 与 B 是常数．证明：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续．

(东北大学　1998 年)

一、(20分)　1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，若对 $x_n \in [a, b]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 存在，求证：存在 $x_0 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = A$．

2. 证明：在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的周期函数，在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续．进而求证：$f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数．

二、(20分)　1. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明：对任何 $x_0 > a$，$f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致连续．

2. 在上述假设条件下，存在 $x_0 \to +\infty$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$．请证明此结论．

三、(20分)　1. 把二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax + bx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为定积分．其中 $f(t)$ 是处处连续的函数，且 $a^2 + b^2 \neq 0$．

2. 设 C 是不经过原点的一条光滑简单闭曲线的正向，计算曲线积分 $\int_C \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$．

四、(10分)　设 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在 $[a, b]$ 上连续，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b)$ 上处处收敛，而在 $x = b$ 处发散．证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b)$ 上非一致收敛．

五、(15分)　设 $f(x, t)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上连续，且广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)\mathrm{d}t$$

在 (α, β) 上关于 t 是一致收敛的．证明：此广义积分在 $[\alpha, \beta]$ 上关于 t 是一致收敛的．

六、(15 分)　证明：广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\lambda}\mathrm{d}x$在$0<\lambda<2$上条件收敛(即收敛，但非绝对收敛)，且在$0<\lambda<2$上内闭一致收敛，但非一致收敛.

(东北大学　1999 年)

一、(20 分)　1. 设$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，试证明：函数$f(x)=xD(x)$在$x=0$处不可导.

2. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(x)\geqslant 0$且不恒为 0，试证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

3. 证明：广义积分$\int_3^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$收敛.

4. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在$(0,0)$点不连续.

二、(10分)　设$f(x)$是有限开区间(a,b)上的连续函数，证明：$f(x)$在(a,b)上一致连续的充分必要条件是：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在.

三、(10 分)　设函数列$f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^4x^4}(n=1,2,\cdots)$，试证明：$\{f_n(x)\}$在闭区间$[0,1]$上不一致收敛.

四、(10 分)　试证明：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$在任何有限区间内一致收敛，但对任意给定的$x$值都不绝对收敛.

五、(10 分)　试举出$f(x)$在闭区间$[a,b]$上不是 Riemann 可积，而$f^2(x)$在闭区间$[a,b]$上是 Riemann 可积的例子，并给出证明.

六、(10 分)　求出由抛物线$y^2=px$，$y^2=qx(0<p<q)$，以及双曲线$xy=a$，$xy=b(0<a<b)$所围区域的面积.

七、(10 分)　设S为上半单位球面$x^2+y^2+z^2=1$的上侧，计算第二类曲面积分：

$$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

八、(20 分)　利用$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x(t \geqslant 0)$，计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

(东北大学　2000 年)

一、(20 分)　简答下列各题：

(1) 用肯定的语气叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界；并用此定义证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间(0, 1)上无界.

(2) 证明：函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可微，但在 $x = 0$ 点的任何一个邻域内有不可微的点，其中

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(3) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$，是否有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛？为什么？

(4) 设$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$在点$(x_0, y_0)$处存在，$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$在点$(x_0, y_0)$处连续，证明：二元函数 $f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)处可微.

二、(8 分)　设 $f(x)$ 在(a, b)连续，$c \in (a, b)$，且 $f(x)$ 在(a, c)和(c, b)内可微，$\lim\limits_{x\to c} f'(x)$存在且$\lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c)$.

三、(8 分)　求出由椭圆$(2x + y)^2 + (x + 2y)^2 = 1$所围成区域的面积.

四、(10 分)　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x = 0$.

五、(12 分)　设 S 是三维空间中 xy 平面上的曲线段：$y = \sin x$，$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转而成的曲面(方向取为右侧)，试计算曲面积分：

$$I = \iint\limits_S 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (1 + y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

六、(13 分)　证明：函数 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ 在$(0, +\infty)$上一致连续.

七、(13 分)　设 $u_1(x) = \sin x$，$u_{n+1}(x) = \sin u_n(x)(n = 1,2,\cdots)$，证明：

(1) 对任何 $x \in (0, \pi)$，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(x)$在$(0, \pi)$上一致收敛.

八、(16 分)　已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 证明:

(1) 对任何 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\sqrt{\pi}$.

(2) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(3) 在任何有限区间$[a,b]$上, 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在区间$[a,b]$上一致收敛.

(东北大学　2001 年)

一、(28 分)　填空:

1. 设 $E=\{x:x\in(0,1)$ 中的有理数$\}$, 则 E 的聚点集为______, $\sup E=$ ______, $\inf E=$ ______;

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, $g(x)=f(x)\sin x$, 则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的导数为______;

3. 设函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$, 则 $D(x)$ 在$[0,1]$上关于任意分法的上和 $\overline{S}=$ ______, 下和 $\underline{S}=$ ______, 第 i 个区间的振幅 $\omega_i=$ ______;

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域是______;

5. 设 F 是可微函数, $z=xy+F\left(\frac{y}{x}\right)$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______;

6. 设函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 的 Taylor 级数展开式是__________;

7. 设空间区域 $\Omega(t)$: $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2(t>0)$, $f(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)}z^2dxdydz$ 满足 $f'(t)=16\pi$, 则 $t=$ ______.

二、(8 分)　设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上严格单调增加, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限), 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

三、(8 分)　设函数 $f(x)$, $f'(x)$ 在区间$[a,b]$上连续, $f(x)$ 在区间(a,b)上存在二阶导数; $f(a)=f(b)=0$ 且存在 $c\in(a,b)$, 使 $f(c)>0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

四、(8 分)　证明: 函数 $f(x)=\sin x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

五、(8 分)　计算第二类曲线积分$\int_l e^x(2-\cos y)\mathrm{d}x - e^x(y-\sin y)\mathrm{d}y$，其中 l 是从(0, 0)沿 $y=\sin x$ 到$(\pi, 0)$的有向曲线.

六、(10 分)　设 $f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，则偏导数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$存在，且它们在(0, 0)不连续，在(0, 0)点的任一邻域内无界，但 $f(x, y)$在(0, 0)可微.

七、(15 分)　设 $u_1(x) = \sin x$，$u_{n+1}(x) = \sin u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

1. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}u_n(x) = 1$；

2. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$在$(0, \pi)$上一致收敛，但不绝对收敛.

八、(15 分)　设 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\,(0 \leqslant \alpha < +\infty)$，证明：

1. $F'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

2. $F''(\alpha) = F(\alpha) - \dfrac{\pi}{2}(\alpha > 0)$.

(东北大学　2002 年)

一、(30 分)　填空：

1. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$，$f(0) = 0$，则______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y =$ ______.

3. 设 $\xi = x$，$\eta = x^2+y^2$，则由方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$变换为 z 关于新自变量 ξ，η 的方程为______.

4. 函数 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$在 $x=0$ 的 Taylor 级数展开式是______，约定$(-1)!! = 1$.

5. 引进新变量 $u = x+y$，$v = x-y$，则积分$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x, y)\mathrm{d}y$变换成关于变量 u，v 的二次积分是______.

6. 设 S 为上半球面$x^2+y^2+z^2 = 1(z > 0)$的上侧，则第二类曲面积分

$\iint\limits_{S}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

二、(10分)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且 $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b(f(x))^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

三、(10分)　设 $a<0$, 函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$上可导, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $f(0)\cdot f'(0)\geqslant 0$; 证明：存在 $\xi\in[a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

四、(10分)　设 L 是一条分段光滑的闭曲线且原点位于闭曲线 L 的内部, 方向为逆时针方向, 计算第二类曲线积分

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

五、(10分)　证明：函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ 分别在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上一致收敛, 但在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不一致收敛.

六、(10分) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$上不一致收敛.

七、(20分)　设 $J=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x\ (\alpha>0,\beta>0)$,

1. $\forall b>0$, 证明：广义积分 J 关于 $\alpha\in[0,b]$ 一致收敛；

2. 求广义积分 J 的值.

(北京师范大学　1992年)

一、(10分)　求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

二、(20分)　1. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 时连续. 如果积分 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 在 $\lambda=\alpha$ 和 $\lambda=\beta(\alpha<\beta)$ 时收敛. 证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

2. 证明 $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\dfrac{x^n}{1+x^n}=\dfrac{1}{2}\ln2$, $x\in(0,1)$.

三、(20分)　1. 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$中任意一点有有界导数, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明：存在某点 $c\in(0,+\infty)$, 使得 $f'(c)=0$.

四、(10分)　设 Ω 是 R^m 中原点的一个邻域, $g(x)\in C^{(2)}(\Omega)$, $g(0)=$

0. 求证：

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if_i(x)，其中\ f_i(x)\in C^{(1)}(\Omega)，f_i(0)=\frac{\partial g(0)}{\partial x_i}.$$

五、(20 分)　设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续，试证：

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

六、(20 分)　设 D 为平面区域，$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$. 证明：$u(x,y)$ 是调和函数，即 u 满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\equiv0$ 的充要条件是：对 D 内任一圆周 L，其所限定的区域属于 D，都有 $\int_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$. 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 沿 L 的单位法向量 n 的方向导数，s 为 L 的弧长参数.

(北京师范大学　1993 年)

一、(15 分)　解答下列问题：

1. 求极限 $I=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 设 $f''(0)$ 存在，$f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$. 求 $g'(0)$.

二、(15 分)　设 $a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$（$n$ 为自然数），求证：

1. $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$；　2. $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$；　3. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

三、(12 分)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 求证：若存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$.

四、(12 分)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-cx-d)=0$（$c$，$d$ 为常数），求证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

五、(12 分)　计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\ (z\geqslant c)$ 的上侧.

六、(12 分)　设函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},\ (x,y)\in[-1,1]\times[-1,1].$$

作变量替换 $x=\sin u$，$y=\sin v$. 求证：$w=\ln z$ 满足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0,\ (u,\ v)\in\mathrm{R}^2.$$

七、(12 分)　证明：1. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\sin\alpha\,dx$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

2. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\sin\alpha\,d\alpha$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

八、(10 分)　设函数序列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 满足：

1. $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 处处收敛；

2. $f_n(x)\in C^{(1)}_{[a,b]}$ $(n=1,2,\cdots)$，且对一切 $x\in[a,b]$ 及一切自然数 n，有

$$|f'_n(x)|\leqslant M\ (M\text{ 为常数}).$$

3. 求证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

(北京师范大学　1996 年)

一、(15 分)　1. 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明：(1) $\lim_{n\to\infty}x_n=0$；　(2) $\lim_{n\to\infty}nx_n=1$.

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\{p_n\}$ 为单调增加序列，且 $\lim_{n\to\infty}p_n=+\infty$，$p_{n+1}\neq p_n$，$n=1,2,\cdots$. 求证：$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$.

二、(15 分)　函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有连续导函数，且 $\lim_{x\to a^+}f'(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-}f'(x)$ 均存在且有限，试证：

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续；　(2) $\lim_{x\to a^+}f(x)$，$\lim_{x\to b^-}f(x)$ 均存在.

三、(10 分)　函数 $f(x)$ 二次可微，$f(0)=f(1)=0$，$\min_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. 试证：

$$\max_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8.$$

四、(15 分)　证明：$\frac{1}{n\ln n}\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2\ln k}\sim\frac{1}{n(\ln n)^2}$　$(n\to+\infty)$.

五、(15 分)　函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$, $x\in[0,+\infty)$.

(1) 证明：$f(x)$ 在$[0,+\infty)$一致连续；

(2) 证明：$\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\ln(1+2x)$；

(3) 证明：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}\sim\frac{\ln(1+2x)}{x\ln2}(x\to\infty)$.

六、(15 分)　设 C 为锥面 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=(z-z_0)\tan\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. S 是包含在 C 的内部区域$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leqslant(z-z_0)\tan\alpha\}$里的光滑曲面，$S$ 与 C 的交线是没有重点的闭曲线，且从点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 出发的任意射线与 S 至多有一个交点，平行于 z 轴的直线与 S 也至多有一个交点. $\boldsymbol{n}$ 为 S 的法线方向，其正方向指向圆锥内部的区域被 S 分割出来的无界区域. $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $|\boldsymbol{r}|=r$. 求

$$I=\iint_S\frac{\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}\rangle}{r^2}\mathrm{d}S.$$

七、(15 分)　$f(x)$ 在$[a,b]$可积，求证：

(1) 任意 $\varepsilon>0$, 则存在$[c,d]\subset[a,b]$, 使得 $f(x)$ 在$[c,d]$上的振幅 $\omega_f[c,d]<\varepsilon$；

(2) 证明 $f(x)$ 的连续点在$[a,b]$处处稠密，即求证任意$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 则 $f(x)$ 在(α,β)内有连续点；

(3) 若 $f(x)\geqslant0$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$的充要条件是 $f(x)$ 在连续点恒为零.

(北京师范大学　1997 年)

一、(16 分)　设 $a_1>b_1>0$, 且 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$, $n=2,3,\cdots$. 证明：数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$的极限存在且都等于 $\sqrt{a_1b_1}$.

二、(16 分)　设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$ 上的二元连续函数，$f(0,0)=0$, 且在$(0,0)$处，$f(x,y)$ 可微. 求极限：

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^4}}.$$

三、(17 分)　设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n (n = 2, 3, \cdots)$. 证明：

(1) 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上有惟一的实根 x_n；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 有极限，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

四、(17 分)　设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续，在 (a, b) 内二阶可导且 $|g''(x)| \geqslant m > 0$ (m 为常数)，又 $g(a) = g(b) = 0$. 证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)| \geqslant \frac{m}{8}(b-a)^2.$$

五、(17 分)　判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1 + x^p \sin^2 x}$ 的敛散性.

六、(17 分)　设 Ω 由 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$ 所围成. 求积分

$$I = \iiint_\Omega x^2 y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(北京师范大学　1998 年)

一、(20 分)　设 $f \in C^2(\mathrm{R})$ 且 $\forall x \in \mathrm{R}$, $\forall h > 0$, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0$. 证明：$\forall x \in \mathrm{R}$, $f''(x) \geqslant 0$.

二、(20 分)　设 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos 2^n x$. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1}(f(x) - f(0))$.

三、(20 分)　设 $f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-1}[1 - \mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}], & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,

求 f 在 $(0, 0)$ 的四阶 Taylor 多项式，并求出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0)$.

四、(20 分)　设广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：存在 $\xi \in (1, \infty)$，使得

$$\int_1^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

五、(20 分)　设 f 是 R^n 的开集 G 到 R^n 的可微变换. $x, y \in G$, $x \neq y$. 求证：若线段 $\overline{xy} \in G$，则存在 $\xi \in \overline{xy}$，使得

$$|f(y) - f(x)|^2 = ((f(y) - f(x))f'(\xi)) \cdot (y - x),$$

式中 f' 表示 f 的导数(Jacobi 阵)，"·" 表示 R^n 中的内积.

(北京师范大学　1999 年)

一、(14 分)　(1) 试证：数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right\}$ 收敛.

(2) 记 $C_0 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right\}$.

试证：$\lim_{p\to 0^+}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}-\frac{1}{p}\right)=C_0$.

二、(14 分)　求最小的 β 和最大的 α，使所有的自然数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

三、(14 分)　设 $f(x)$ 在实轴上有界且连续可微，并满足

$$|f(x)+f'(x)|\leqslant 1,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

试证：$|f(x)|\leqslant 1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

四、(15 分)　设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$. 试证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$内有且仅有一个根；

(2) $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$.

五、(14 分)　计算 $f(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dy$，此处 $-\infty<y<+\infty$.（计算过程要理由）

六、(15 分)　设函数 $g(x)$ 在$[0,a]$上连续可微，$g(0)=0$. 试证：

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|g'(x)|^2dx,$$

其中等号成立当且仅当 $g(x)=cx$（c 为常数）.

七、(14分)　给定积分 $I=\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$. 作正则变换 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，区域 D 变成 Ω. 如果变换满足：

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}.$$

试证：$I=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]dudv$.

（北京师范大学　2001 年）

一、(15 分)　证明下述 Dini 定理. 设 $-\infty<a<b<+\infty$，$\forall n\in N$，$f_n\in C[a,b]$，且 $f_n\geqslant f_{n+1}$. 如果 $\forall x\in[a,b]$，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\max\{|f_n(x)|:x\in[a,b]\}=0.$$

二、(15分)　设 $n \in \mathrm{N}$, $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$. 证明：若 P, $Q \in \mathrm{R}^n$, $P \neq Q$, $f(P) = f(Q)$. 则在线段 $\overline{PQ}$ 上，必有一点 ξ 处有一个方向导数等于零.

三、(20分)　设 $f_j:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ 可导且

$$\forall (x, y) \in \mathrm{R}^2, \left|\frac{\partial f_j(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y}\right| < \frac{1}{3}, j = 1, 2.$$

令 $f = (f_1, f_2):\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$. 任取 $P \in \mathrm{R}^2$ 并定义 $P_1 = f(P)$, $P_{n+1} = f(P_n)$, $n \in \mathrm{N}$. 证明：$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = f(\lim\limits_{n\to\infty} P_n)$.

四、(15分)　设 $f \in C(\mathrm{R})$, $n \in \mathrm{N}$. 记 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n$. 定义

$$F(x) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k),\ D = \{x \in \mathrm{R}^n : 0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\}.$$

证明：

$$\int_D F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^n.$$

五、(20分)　设 $f(x) = \log \dfrac{1}{\left|2\sin \frac{x}{2}\right|}$, $0 < x < 2\pi$. 请计算 f 的一切 Fourier 系数.

六、(15分)　计算 R^3 中单位球面 $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的面积.

(北京师范大学　2002年)

一、(15分)　设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，并且 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界. 证明：$f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

二、(20分)　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为区域 $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

三、(15分)　取 $u = \dfrac{y}{x}$, $v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 作为新的自变量，变换方程：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

四、(15分)　设 $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n} f\left(x + \dfrac{k}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 内一致收敛.

五、(20分)　设 $p \in [1, +\infty)$, 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}$ 何时发

散？何时条件收敛？何时绝对收敛？

六、(15 分)　求 $g'(\alpha)=$？其中

$$g(\alpha)=\int_1^{\infty}\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x,\ \alpha\in(-\infty,+\infty).$$

(北京师范大学　2003 年)

一、(15 分)　设 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n^2}{1+x_n^2}$，$x_1=a$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限.

二、(15 分)　设 $\alpha=\sup\{f(x)\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，证明存在 $a\leqslant x_n\leqslant b$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$ 成立.

三、(15 分)　写出 $e^{\sin x}$ 在 $x=0$ 点展开的 Taylor 级数的前五项系数，并指出该级数的收敛区域.

四、(20 分)　已知 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+h^2(z)=1$ 确定，且 $h(z)$ 具有所需性质，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(20 分)　求下面曲面所围立体的体积，$z=xy$，$x+y+z=1$，$z=0$.

六、(20 分)　将直角坐标系下的 Laplace 方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为极坐标系下的形式.

七、(10 分)　设 $f(x)$ 在[0, 1]上具有连续导函数，且 $f(1)=0$，证明函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛.

八、(25 分)　设 $f(x)$ 定义在实轴 R 上，且 $f'(x)$ 在 R 上连续．任取 $x_0\in\mathrm{R}$，令 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=0,1,2,\cdots$．证明：

(1) 若 $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$x\in\mathrm{R}$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 若 $f(0)>0$，$f(x)\leqslant M$ 且 $|f'(x)|<1$，$x\in\mathrm{R}$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

九、(10 分)　设 Γ 是平面上过原点的光滑闭曲线，C_ε 是以原点为圆心，半径为 ε 的圆周，Γ_ε 表示 Γ 截取含在 C_ε 中的曲线段后得到的曲线，求 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中取 Γ_ε 的方向为正方向.

(北京师范大学 2004 年)

一、(10 分) 一个容器的底是正方形，边是竖直的，没有盖．用 2700cm^2 的材料制造这样的容器，求使得容积最大时的容器尺寸．

二、(10 分) 方程 $x = r\theta - r\sin\theta,\ y = r - r\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 表示旋轮线的一拱．求其长．

三、(10 分) 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 表示一个椭圆．求此曲线绕 x 轴旋转一周所成曲面的面积．

四、(10 分) 一个半径 5m、高 9m 的圆柱状水箱的三分之二蓄满了水．求把所有的水抽出水箱顶所需做的功．

五、(10 分) 一个水坝的迎水面是一个竖直的等腰梯形，上底长 200m，下底长 100m，高 40m．求当水面达到坝顶时，迎水面所受的水压力．

六、(20 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1}[1 - e^{x(x^2+y^2)}], & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases},$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\ 0)$，$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,\ 0)$．

七、(20 分) 证明对于所有的 $n = 1,\ 2,\ \cdots$，

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1.$$

八、(20 分) 设 $f \in C^2(\mathrm{R})$ 且

$$\forall x \in \mathrm{R},\ \forall h > 0,\ f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0.$$

证明：$\forall x \in \mathrm{R},\ f''(x) \geqslant 0$．

九、(20 分) 设 f 在 R 上有三阶连续导函数．证明：

$$f(x) - (f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2) = \frac{1}{2}\int_0^x f'''(t)(x-t)^2 \mathrm{d}t.$$

十、(20 分) 设 f 在 $[a,\ b]$ 上连续且单调增 $(-\infty < a < b < +\infty)$．证明：

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

并证明上式中，等号仅当 f 为常值函数时成立．

附录 3　　常用数学符号一览表

X, A, …：表示集合；x, a, …表示元素.

$x\in X$, $x\notin X$：分别表示 x 属于 X, x 不属于 X.

N^+：表示正整数集.

R：表示实数集，同时也表示无穷区间$(-\infty, +\infty)$.

R^2：表示二维平面或二维欧氏空间；R^n 表示 n 维欧氏空间.

$\Leftrightarrow$：表示等价或充分必要. 例如，$P\Leftrightarrow Q$ 表示 P 与 Q 等价，或 P 成立的充分必要条件是 Q 成立.

$f(g(x))$：表示函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数，也写成 $(f\cdot g)(x)$.

$\forall$：表示“对任意”、“对所有”或“对每一个”.

$\exists$：表示“存在”或“有”.

对偶法则：设命题 P 为

$$p_1S_1,\ p_2S_2,\cdots,\ p_nS_n,\ 使得\ S_{n+1}, \qquad (*)$$

其中 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$为逻辑符号 $\forall$ 或 $\exists$. $S_i(i=1, 2, \cdots, n+1)$代表数学表达式. 则为了得到命题 P 的否命题的肯定叙述，只要将$(*)$中的所有逻辑符号 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$从 $\forall$($\exists$)改成 $\exists$($\forall$)，并将最后的 S_{n+1}改为它的否定式即可. 例如，数集 A 有界，即

$$\exists M>0,\ \forall x\in A,\ 使得|x|\leqslant M.$$

它的否定，即数集 A 无界，就是

$$\forall M>0,\ \exists x\in A,\ 使得|x|>M.$$

附录 4　中英文人名对照表

阿贝尔 Abel	博雷尔 Borel	达朗贝尔 D'Alembert
欧拉 Euler	高斯 Gauss	拉普拉斯 Laplace
利普希茨 Lipschitz	皮亚诺 Peano	罗尔 Rolle
斯图茨 Stolz	巴拿赫 Banach	康托 Cantor
戴德金 Dedekind	费马 Fermat	海涅 Heine
莱布尼茨 Leibniz	麦克劳林 Maclaurin	拉阿比 Raabe
施瓦茨 Schwarz	泰勒 Taylor	波尔察诺 Bolzano
柯西 Cauchy	狄利克雷 Dirichlet	傅里叶 Fourier
拉格朗日 Lagrange	洛必达 L'Hospital	牛顿 Newton
黎曼 Riemann	斯托克斯 Stokes	魏尔斯特拉斯 Weierstrass

参考文献

1 邓东皋，尹小玲．数学分析简明教程(上、下册)．北京：高等教育出版社，1999

2 陈传璋等．数学分析(上、下册)．第2版．北京：高等教育出版社，1983

3 费定晖，周学圣．数学分析习题集题解．济南：山东科技出版社，2003

4 孙涛．数学分析经典习题解析．北京：高等教育出版社，2004

5 宋国柱．分析中的基本定理和典型方法．北京：科学出版社，2004